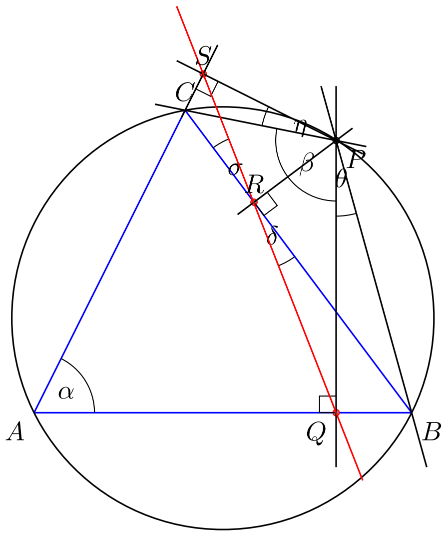
1. házi feladat

1.feladat.



Legyen P a kör tetszőleges pontja, az ABC háromszög oldalaira bocsátott merőlegesek talppontjai pedig S, R és Q.
Mivel $ACPB$ húrnégyszög, így szemközti szögeik 180 fokosak, vagyis $\alpha + \beta + \theta = 180°$. Az $ASPQ$ négyszög szintén húrnégyszög, így $\alpha + \beta + \eta = 180°$. Tehát $\eta = \theta$.
A $PRQB$ és $SCRP$ négyszögek húrnégyszögek, így $\delta = \theta$ és $\sigma = \eta$.
Az előzőekből látszik, hogy σ és δ csúcsszögek, így az S, R és Q pontok valóban egy egyenesre esnek.

2.feladat.

a.) Legyenek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ vektorok a hatszög csúcsaiba mutató helyvektorok.

Ekkor a felezőpontok helyvektorai:
$\overrightarrow{A} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, $\overrightarrow{B} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$, $\overrightarrow{C} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$, $\overrightarrow{D} = \frac{\mathbf{d}+\mathbf{e}}{2}$, $\overrightarrow{E} = \frac{\mathbf{e}+\mathbf{f}}{2}$, $\overrightarrow{F} = \frac{\mathbf{f}+\mathbf{a}}{2}$.

Mivel $\overrightarrow{AB} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{c}-\mathbf{a}}{2}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{\mathbf{e}-\mathbf{c}}{2}$, és $\overrightarrow{EF} = \frac{\mathbf{a}-\mathbf{e}}{2}$, így teljesül az $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = 0$ összefüggés.

b.) A G pont az FE szakasz egyik harmadolópontja, ezért az $\overrightarrow{AG}$ vektort érdemes az $\overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{AE}$ vektorokkal kifejezni. Írjuk fel ezeket a helyvektorok segítségével: $\overrightarrow{AF} = \mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\mathbf{a}$.

Tehát $\overrightarrow{AG} = \frac{2\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}}{3} = \frac{2(\mathbf{b}+\frac{1}{3}\mathbf{a})+\frac{2}{3}\mathbf{a}}{3} = \frac{4}{9}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$.

3.feladat.

a.) $P = (x+2, 1, 4)^T$, $\mathbf{v} = (-2, 1, 2)^T$
Jelölje az e egyenes P ponthoz legközelebbi pontját $Q = (2-2t, t, 3+2t)^T$
Ekkor: $\overrightarrow{PQ} = (-2t-x, t-1, 2t-1)^T$
Két feltételnek kell teljesülnie:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ és } |\overrightarrow{PQ}|^2 = 2$$

Ebből a következő egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} 9t + 2x &= 3 \\ 9t^2 - 6t + 4tx + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Innen két megoldás adódik:
$t_1 = 1$, $x_1 = -3$
$t_2 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{3}{5}$

b.) Legyen a két egyenes e_1: $x = 3-2q$, $y = 8+q$, $z = -7+2q$ és e_2: $x = 0$, $y = 5+3s$, $z = 3-s$. A transzferzálisuk egy olyan egyenes, mely mindkettőjüket metszi. Keressük a P ponton áthaladó ilyen egyenest. Először írjunk fel egy, a két egyenest metsző egyenest.
Ehhez adjuk meg az e_1 és e_2 egy-egy pontját. Az $E_1 = (3-2q, 8+q, -7+2q)^T \in e_1$, míg $E_2 = (0, 5+3s, 3-s)^T \in e_2$.
Az e_1 és e_2 egyeneseket metsző a egyenes tehát $\overrightarrow{E_1E_2}$ irányvektorú, és például E_1 kezdővektorú, vagyis a alakja:

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2q + (3 - +2q)t \\ y &= 8 + q + (-3 + 3s - q)t \\ z &= -7 + 2q + (10 - s - 2q)t \end{aligned}$$

Mivel $P = (-1, 3, 3)^T$-t metszenie kell az a-nak, így ha az előző egyenletrendszerben x, y és z helyére -1-t, 3-t és 3-t írunk, egy háromismeretlenes, 3 egyenletből álló egyenletrendszert kapunk. Ennek megoldásai: $q = 3$, $s = -2$ és $t = \frac{2}{3}$.

A keresett transzferzális egyenlete tehát:

$$\begin{aligned} x &= -3 + 3t \\ y &= 11 - 12t \\ z &= -1 + 6t \end{aligned}$$

4.feladat. Elég megmutatni, hogy mindhárom oldal hossza azonos:
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2+18^2+2^2} = \sqrt{392} = 14\sqrt{2}$
$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6^2+10^2+16^2} = \sqrt{392} = 14\sqrt{2}$
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+8^2+18^2} = \sqrt{392} = 14\sqrt{2}$

Jelölje ABC síkját α, ABC középpontját O. Tudjuk, hogy egy szabályos tetraéder magassága $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, ahol a jelöli az oldalhosszt. D pontot tehát megkaphatjuk, úgy, hogy O pontból felmérünk $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ hosszt $\mathbf{n}_\alpha$ irányban:

$$O = \frac{1}{3}(A+B+C) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)^T$$

$$\alpha : 11x - 5y - z - 7 = 0$$

$$\mathbf{n}_\alpha = \frac{1}{7\sqrt{3}}(11, -5, -1)^T$$

Innen D-re két megoldás adódik:
$D_1 = O + 14\sqrt{2}\mathbf{n}_\alpha = \left(\frac{46}{3}, -\frac{22}{3}, \frac{7}{3}\right)^T$
$D_2 = O - 14\sqrt{2}\mathbf{n}_\alpha = (-14, 6, 5)^T$

5.feladat.

a.) Legyen $S = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$. Elég belátni, hogy S eleme mindhárom súlyvonalnak. Jelölje s_a az A csúcsból induló súlyvonalat.
$s_a : \mathbf{a}(1-t) + t(\frac{\mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{c}}{2})$
$t = \frac{2}{3}$ bizonyítja, hogy $S \in s_a$.
Hasonlóképp látható, hogy a másik kettő súlyvonalnak is eleme S.

b.) Legyen $M = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$. Elég belátni, hogy M eleme mindhárom magasságvonalnak.
$\overrightarrow{AM} = (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$
$\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$
Ez a két vektor merőleges egymásra, hiszen egy rombusz átlói merőlegesek. Ez pedig azt jelenti, hogy M eleme az A csúcsból induló magasságvonalnak. Hasonlóképpen látható, hogy a másik kettő magasságvonalnak is eleme M.

c.) Euler-egyenes tétele:
A háromszög M magasságpontja, S súlypontja és a köré írt kör O középpontja egy egyenesen van. Az S pont az MO szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontja.

A tétel állítása az a.) és b.) részfeladatokból azonnal következik.

d.) *Egyszerűbb számolás érdekében O legyen az origó.*

$$\text{Legyen } P = \frac{a\mathbf{a}+b\mathbf{b}+c\mathbf{c}}{a+b+c}.\text{ Elég belátni, hogy } P = Q.$$

Ehhez azt kell megmutatni, hogy P elem mindhárom szögfelezőnek.
Egy szögfelező irányvektorát megkaphatjuk, ha mindkét oldal irányvektorát lenormáljuk, és ezeket összeadjuk. *Rombusz átlói szögfelezők is.*

$$AB \text{ oldal irányvektora normálva: } \mathbf{v}_c = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{c}$$

$$AC \text{ oldal irányvektora normálva: } \mathbf{v}_b = \frac{\mathbf{c}-\mathbf{a}}{b}$$

Tehát az A csúcsból induló szögfelező irányvektora:

$$\mathbf{v}_b + \mathbf{v}_c = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{c} + \frac{\mathbf{c}-\mathbf{a}}{b} = \frac{b\mathbf{b}+c\mathbf{c}-(b+c)\mathbf{a}}{bc}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{a\mathbf{a}+b\mathbf{b}+c\mathbf{c}}{a+b+c} - \mathbf{a} = \frac{b\mathbf{b}+c\mathbf{c}-(b+c)\mathbf{a}}{a+b+c}$$

Mivel ez a két vektor csak konstans szorzóban tér el, ezért ezzel beláttuk, hogy P eleme az A csúcsból induló szögfelezőnek.
Hasonlóképpen látható, hogy a másik kettő szögfelezőnek is eleme P.