1. Vektorterek és lineáris leképezések

1.1. Feladat. Legyenek $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az

$$A(x, y) = (2x - y, y)$$
$$B(x, y) = (-x, x + y)$$

módon definiált leképezések. Ellenőrizzük, hogy lineárisak és írjuk fel a mátrixukat a standard bázisban. Írjuk fel az $A \circ B$ és $B \circ A$ kompozíciók mátrixát is. Mi a kapott mátrixok nyoma és determinánsa? Írjuk fel A mátrixát az $\{(1, 0), (1, 1)\}$ bázisban is.

1.2. Feladat. Tekintsük azt az $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezést, ami az $(1, 0)$ vektort a $(2, -1, 0)$ vektorba, a $(0, 1)$ vektort pedig a $(-1, 0, 3)$ vektorba viszi. Mi a mátrixa a standard bázisban? Tekintsük $\mathbb{R}^2$-ben az $\{(1, 1), (1, 3)\}$ vektorokat, $\mathbb{R}^3$-ben pedig az $\{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ vektorokat. Ellenőrizzük, hogy ezek bázisok és írjuk fel A mátrixát ezekre nézve.

1.3. Feladat. Mik az $(1, 2, 0)$ vektor koordinátái a

$$\{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, -1)\}$$

bázisban?

1.4. Feladat. Legyen $\mathbf{a} = (0, -1, 3, 4, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -2, -1, 7)$ és $\mathbf{c} = (-3, 1, 7, 9, 0)$. Mennyi $|4\mathbf{a}|$, $|-\frac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{c})|$, $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle$ és $\langle 2\mathbf{a}, -\mathbf{c} \rangle$ a standard skaláris szorzatra nézve?

1.5. Példa. Példák $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ lineáris transzformációira: forgatás, vetítés, nyújtás, tükrözés, ezek mátrixa az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisban.

1.6. Feladat. Számoljuk ki a sík α szögű forgatásának $R(\alpha)$ mátrixát és ellenőrizzük a szögfüggvényekre vonatkozó addíciós képleteket. Mi az x tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixa? Ha $\mathbf{v}$ egységvektor $\mathbb{R}^3$-ban, akkor mi a $\mathbf{v}$ egyenesére vetítés mátrixa?

1.7. Feladat. Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelyiknek két oldala $\mathbf{a} = (1, 2, 5)$ és $\mathbf{b} = (-1, 1, -3)$?

1.8. Feladat. Legyen $\mathbf{a} = (-1, 3, 4)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 7)$ és $\mathbf{c} = (-12, 9, 0)$. Mennyi $\mathbf{abc}$ és $\mathbf{bac}$? (-153, 153)

2. Vektorfüggvények deriválása

2.1. Feladat. Mi az $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = \sin(2t)\mathbf{i} + \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}$ síkgörbe $t_0 = \frac{\pi}{2}$ pontjában az érintő egyenlete?

2.2. Feladat. Tekintsük az egységgömb

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi)\mathbf{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\mathbf{j} + \cos(\theta)\mathbf{k}$$

paraméterezését. Mi az érintősík egyenlete a $(\theta_0, \varphi_0) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ paraméterű pontban?

2.3. Feladat. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. Mi $\operatorname{grad} f$? Mi $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$? ($(x, y, z), 3$)

2.4. Feladat. Mi a síkon az $\sin(x + y)\sin(x - y) - \frac{1}{2} = 0$ görbéhez az $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ pontban húzott érintő egyenlete?

2.5. Feladat. Mi a térben az $x^2 + 3xy - z^3 - xz^2 + y^4 + 1 = 0$ felület érintősíkjának az egyenlete az $(x_0, y_0, z_0) = (3, 1, 2)$ pontban?

2.6. Feladat. Legyen $f_1(x, y) = e^x \sin y$ és $f_2(x, y) = e^x \cos y$. Mi $\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2, \operatorname{div} \operatorname{grad} f_1, \operatorname{div} \operatorname{grad} f_2$?

2.7. Példa. Leibniz-szabályok:

1. $\operatorname{grad}(fg) = (\operatorname{grad} f)g + f \operatorname{grad} g$
2. $\triangle(fg) = (\triangle f)g + 2(\operatorname{grad} f) \cdot (\operatorname{grad} g) + f(\triangle g)$

3. Görbementi integrál

3.1. Példa. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés rotációja

3.2. Feladat. Mi az $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$ görbe ívhossza a $t \in [0, 2]$ intervallumon?

3.3. Feladat. Mi az $\mathbf{r}(t) = \frac{t^3}{3}\mathbf{i} + \frac{6\sqrt{2}}{5}t^{\frac{5}{2}}\mathbf{j} + \frac{9}{2}t^2\mathbf{k}$ görbe ívhossza a $t \in [-1, 1]$ intervallumon?

3.4. Feladat. Mi az $\mathbf{r}(t) = (\sinh t + \cosh t)\mathbf{i} + (\cosh t - \sinh t)\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$ görbe ívhossza a $t \in [0, \ln 2]$ intervallumon?

3.5. Feladat. Mi az $\mathbf{u}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$ vektormező integrálja az AB szakasz mentén, ha $A = (1, -2, 3)$, $B = (2, 1, 4)$?

3.6. Feladat. Mi az $\mathbf{u}(x, y, z) = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$ vektormező integrálja az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ görbe mentén $t = 0$-tól $t = 1$-ig.

3.7. Feladat. Mi az $\mathbf{u}(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ vektormező integrálja

a) Az origó körüli R sugarú kör mentén pozitív irányítással?
b) Az origó körüli R sugarú kör mentén negatív irányítással?
c) Az $\mathbf{r}(t) = \alpha\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ egyenes mentén ($\alpha > 0$) $t = -\infty$-től $t = +\infty$-ig?

3.8. Példa. Nem konvex esetben nem elég $\operatorname{rot} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

lokálisan

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \operatorname{grad} \arctan \frac{y}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ \operatorname{grad} - \arctan \frac{x}{y} & \text{ha } y \neq 0 \end{cases}$$

de

$$\int_0^{2\pi} \langle -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}, -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}\rangle dt = 2\pi \neq 0$$

3.9. Feladat. Potenciálos-e az alábbi vektormező? Ha igen, adjuk meg egy potenciálját.

a) $\mathbf{u}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
b) $\mathbf{u}(x, y, z) = e^{x+\sin y}z\mathbf{i} + e^{x+\sin y}z \cos y\mathbf{j} + e^{x+\sin y}$
c) $(x^2 + yz)\mathbf{i} + (y - x^2)\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k}$
d) $\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{(yz-1)\sin(2x)}{y}\mathbf{i} - \frac{\cos^2 x}{y^2}\mathbf{j} + \sin^2 x\mathbf{k}$

- vektorpotenciálos vektormező vektorpotenciálja: adott $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, keressünk $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormezőt, amire $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{u}$ azaz

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = u_x$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = u_y$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = u_z$$

- ha rot $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, akkor rot$(\mathbf{v}+\text{grad}\, f) = \mathbf{u}$ is, legyen $f(x,y,z) = \int_0^z v_z(x,y,\zeta)d\zeta$, ezzel a harmadik komponens eltűnik, megoldandó

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v_y}{\partial z} &= u_x \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} &= u_y \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} &= u_z \end{aligned}$$

- az első két egyenletből

$$\begin{aligned} v_y(x,y,z) &= C_y(x,y) - \int_0^z u_x(x,y,\zeta)d\zeta \\ v_x(x,y,z) &= C_x(x,y) + \int_0^z u_y(x,y,\zeta)d\zeta \end{aligned}$$

- a harmadikból

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^z u_x(x,y,\zeta)d\zeta - \frac{\partial}{\partial y}\int_0^z u_y(x,y,\zeta)d\zeta \\ &= \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} + \int_0^z \frac{\partial u_z(x,y,\zeta)}{\partial \zeta}d\zeta \\ &= \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} + u_z(x,y,z) - u_z(x,y,0) \end{aligned}$$

  tehát $u_z(x,y,0) = \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y}$. Az egyik függvényt 0-nak választhatjuk, pl. $C_x(x,y) = 0$, ekkor $C_y(x) = \int_0^x u_z(\xi,y,0)d\xi$
- egy vektorpotenciál tehát:

$$\begin{aligned} v_x(x,y,z) &= \int_0^z u_y(x,y,\zeta)d\zeta \\ v_y(x,y,z) &= \int_0^x u_z(\xi,y,0)d\xi - \int_0^z u_x(x,y,\zeta)d\zeta \\ v_z(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

3.10. Feladat. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{u}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + 3xz^2\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$ vektorpotenciálos és adjuk meg egy vektorpotenciálját.

4. Felületi és felszíni integrál

4.1. Feladat. Adjuk meg az $\mathbf{a} = (2,1,9)$, $\mathbf{b} = (1,5,10)$ és $\mathbf{c} = (0,4,0)$ helyvektorú pontokat tartalmazó sík egy paraméteres egyenletét és ennek segítségével írjuk fel egy normálvektorát.

4.2. Feladat. Adjuk meg az $\mathbf{r}(u,v) = (u+v)\mathbf{i} + (u^2+v^2)\mathbf{j} + (u^3+v^3)\mathbf{k}$ felület $(u_0,v_0) = (1,-1)$ paraméterű pontjában a normálvektort és az érintősík egyenletét.

4.3. Feladat. Adjuk meg az $x^2+y^2-z^2 = 1$ egyenletű egyköpenyű forgáshiperboloid egy paraméteres egyenletét és határozzuk meg minden pontjában a normálvektorát.

4.4. Feladat. Forgassuk meg az $y = f(x)$ differenciálható függvény grafikonját az x tengely körül. Írjuk fel a kapott forgástest egy paraméteres egyenletét. Mekkora az $a \le x \le b$ sávba eső rész felszíne?

pl. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $a=-1$, $b=1$, gömb felszíne: $2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} \left(1+\frac{u^2}{1-u^2}\right)^{1/2} du = 4\pi$.

4.5. Feladat. Mekkora az $\mathbf{r}(u,v) = e^u(\cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + \mathbf{k})$ felület $(u,v) \in [0,1] \times [0,\pi/4]$ paramétertartománynak megfelelő darabjának a felszíne?

4.6. Feladat. Határozzuk meg az $x^2+y^2+z^2=4$ egyenletű gömbfelület $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ egyenletű hengeren belüli részének a felszínét.

4.7. Feladat. Hol van a tömegközéppontja az origó középpontú, vékony, R sugarú, egyenletes μ felületi tömegsűrűségű gömbhéjnak, ami a $z \geq 0$ féltérben található?

4.8. Feladat. Mi az $\mathbf{u}(x,y,z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormező integrálja az $\mathbf{r}(u,v) = (u+2v)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u-v)\mathbf{k}$ felület $(u,v) \in [0,3] \times [0,1]$ darabján $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ irányítás mellett?

5. Térfogati integrál

5.1. Feladat. Határozzuk meg annak a tórusznak a térfogatát, aminek a középköre R sugarú, a keresztmetszete pedig r sugarú, $r < R$.

5.2. Feladat. Mekkora a térfogata az $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ gömb és a $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ henger metszetének? (Viviani-féle test)

5.3. Feladat. Az $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(\frac{2z}{h}\right)^{2n} \leq 1$ tartományt homogén anyagú, m tömegű test tölti ki $(R,h>0)$. Mekkora a koordinátatengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka? Mi történik, ha $n \to \infty$?

5.4. Feladat. Mennyi az $f(x,y,z) = xyz$ függvény integrálja az $x^2+y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq h$ hengeren?

5.5. Feladat. Integráljuk az $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ függvényt az $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ gömbön.

5.6. Feladat. Mennyi az m tömegű egyenletes tömegeloszlású vékony R sugarú kör alakú drót egy átmérőjére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

5.7. Feladat. Számítsuk ki az m tömegű egyenletes tömegeloszlású vékony R sugarú gömbhéj egy átmérőjére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

6. Integrálátalakító tételek, vektorpotenciál

6.1. Feladat. Számítsuk ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 3$ tetraéder felületén kifelé mutató irányítás mellett?

6.2. Feladat. Integráljuk az $\mathbf{u}(x,y,z) = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ vektormezőt az ABC háromszögvonalon (ebben az irányban), ahol $A=(a,0,0)$, $B=(0,a,0)$ és $C=(0,0,a)$, $a>0$.

6.3. Feladat. Mennyi az $\mathbf{u}(x,y,z) = x(x-2xy+2yz^2)\mathbf{i} - y(2x^2+4xyz+yz^2)\mathbf{j} + 2xz(x+2y+2yz)\mathbf{k}$ vektormező integrálja a $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ egységkocka felületén kifelé mutató irányítás mellett?

6.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{u}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + 3xz^2\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$ vektorpotenciálos és adjuk meg egy vektorpotenciálját.

6.5. Feladat. Integráljuk a $\mathbf{v}(x,y,z) = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$ vektormezőt az $x^2+y^2=a^2$ egyenletű körön pozitív forgásiránnyal.

6.6. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy T síkidom területét

$$A = \oint_{\partial T} x\mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_{\partial T} y\mathbf{i} \cdot d\mathbf{r}$$

módon is számíthatjuk és ennek segítségével határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \sin^3 t\mathbf{j}$ görbével határolt asztroid területét.

7. Közönséges differenciálegyenletek I

7.1. Feladat. Számoljuk ki az $y'(x) = y(x)^2 - (x+1)y(x) + 1$ differenciálegyenlet szukcesszív approximációjával kapott első két közelítő függvényt, ha a kezdeti feltétel $y(0) = 1$.

7.2. Feladat. Számoljuk ki az $y'(x) = y(x)$ differenciálegyenlet szukcesszív approximációjával kapott első négy közelítő függvényt, ha a kezdeti feltétel $y(0) = 1$.

7.3. Feladat. Számoljuk ki az $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$ differenciálegyenlet szukcesszív approximációjával kapott első három közelítő függvényt, ha a kezdeti feltétel $y(1) = 1$.

7.4. Feladat. Szukcesszív approximáció segítségével határozzuk meg az $y'(x) = x + y(x)$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételhez tartozó megoldását.

- $y'(x) = f(x, y(x))$ egyenlet közelítő megoldását keressük $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétellel
- Euler-módszer: rögzítünk egy $h > 0$ lépéshosszt, $x_k = x_0 + kh$,

  $$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

  azaz a függvényt az (x_k, y_k) ponton áthaladó integrálgörbe érintőjével helyettesítjük, ennek y_k-beli értéke az új függvényérték

7.5. Feladat. Euler módszerével határozzuk meg az $y'(x) = x + y(x)$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának közelítését $x = 0$ és $x = 1/2$ között $h = 0{,}1$ lépéshossz mellett és hasonlítsuk össze a pontos megoldással.

7.6. Feladat. Euler módszerével határozzuk meg az $y'(x) = y(x)$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának $x = 1$-ben felvett értékének (azaz e-nek) közelítését $h = \frac{1}{n}$ lépéshossz mellett.

- $y'(x) = f(x, y(x))$ egyenlet közelítő megoldását keressük $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétellel
- Runge-Kutta-módszer: rögzítünk egy $h > 0$ lépéshosszt, $x_k = x_0 + kh$,

  $$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hf(x_k, y_k)\right)$$

  azaz a függvényt az (x_k, y_k) ponton áthaladó integrálgörbe érintőjével helyettesítjük, ezzel közelítjük az $x_k + h/2$-beli függvényértéket, majd az ott áthaladó megoldás érintőjének meredekségével haladunk előre

7.7. Feladat. Határozzuk meg a Runge-Kutta módszerrel az $y'(x) = x + y(x)$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának közelítését $x = 0$ és $x = 0{,}6$ között $h = 0{,}2$ lépéshossz mellett és hasonlítsuk össze a pontos megoldással.

8. Közönséges differenciálegyenletek II

8.1. Feladat. Az $y'' = 2x + 4y - 3y'$ egyenletre az $\mathbb{R}^3$ melyik tartományán teljesülnek a Cauchy-Peano-tétel illetve a Picard-Lindelöf-tétel feltételei?

8.2. Feladat. Az $y' = y \tan x$ egyenletre az $\mathbb{R}^2$ melyik tartományán teljesülnek a Cauchy-Peano-tétel illetve a Picard-Lindelöf-tétel feltételei? Létezik-e az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás?

8.3. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x, y)$ folytonos és független a második változótól, akkor $y' = f(x, y)$-nak tetszőleges kezdeti feltétel mellett létezik egyértelmű megoldása.

Oldjuk meg az $y' = 2x^2 - \sin x$ differenciálegyenletet $y(0) = -1$ kezdeti feltétel mellett.

8.4. Feladat. Oldjuk meg az $y' = e^{-y} \sin^2 x$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

8.5. Feladat. Határozzuk meg a $(2x+1)y'-3y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

8.6. Feladat. Határozzuk meg az $(1+x^2)y'+(1+y^2)=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

8.7. Feladat. Oldjuk meg az $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$ differenciálegyenletet $y(3)=4$ kezdeti feltétel mellett.

8.8. Feladat. Oldjuk meg az $yy'+x=0$ differenciálegyenletet $y(-2)=4$ kezdeti feltétel mellett.

8.9. Feladat. Mely függvények a megoldásai az $y'=\alpha y$ differenciálegyenletnek, ha $\alpha\in\mathbb{R}$ tetszőleges?

9. Fontosabb egyenlettípusok

9.1. Feladat. Határozzuk meg az

$$e^{\frac{y}{x}}xy'=2x^3+e^{\frac{y}{x}}y$$

differenciálegyenlet $y(1)=0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását. Létezik-e az $y(0)=1$ kezdeti értéknek megfelelő megoldás?

9.2. Feladat. Oldjuk meg az $xy'=y-x\cos^2\frac{y}{x}$ differenciálegyenletet.

9.3. Feladat. Oldjuk meg a $2xyy'=y^2-x^2$ differenciálegyenletet $y(2)=0$ kezdeti feltétellel.

9.4. Feladat. Határozzuk meg az

$$y'=\sqrt{x^2+y}+2\frac{y}{x}$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

9.5. Feladat. Határozzuk meg a $(2xy-x^2)+(x^2-y^2)y'=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

9.6. Feladat. Egyváltozós multiplikátorral tegyük egzakttá az $x^3+y^4+8xy^3y'=0$ differenciálegyenletet, majd oldjuk meg.

9.7. Feladat. Oldjuk meg a $2x+\cos y-(x\sin y)y'=0$ differenciálegyenletet $y(1)=0$ kezdeti feltétel mellett.

9.8. Feladat. Határozzuk meg az $y\cosh x+(\sinh x-2y)y'=0$ differenciálegyenlet $y(0)=1$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldását.

9.9. Feladat. Oldjuk meg az $y''=xe^x$ differenciálegyenletet.

9.10. Feladat. Egy test zuhan függőlegesen a gravitáció és a sebesség négyzetével arányos közegellenállás hatására. A mozgást az $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ magasság-idő-függvény írja le, ami eleget tesz a

$$y''(t)=-g+\alpha y'(t)^2$$

differenciálegyenletnek. A $t=0$ pillanatban a test áll és $y(0)=h$ magasan tartózkodik. Hogyan mozog ezután?

9.11. Feladat. Határozzuk meg az $y''+y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

9.12. Feladat. Oldjuk meg az $yy''=1+y'^2$ differenciálegyenletet $y(0)=1$, $y'(0)=0$ kezdeti feltétel mellett.

10. Lineáris differenciálegyenletek

10.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $y_1(x) = x^3$ és $y_2(x) = 1$ függvények az $xy'' - 2y' = 0$ differenciálegyenlet megoldásterének egy bázisát alkotják.

10.2. Feladat. Határozzuk meg az $xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^x$ differenciálegyenlet általános megoldását, ha tudjuk, hogy $y_1 = e^x$ és $y_2 = x+1$ megoldja a hozzá tartozó homogén egyenletet.

10.3. Feladat. Oldjuk meg az $xy''' + 2y'' = \frac{1}{x}$ differenciálegyenletet $y(1) = 1$, $y'(1) = y''(1) = 0$ kezdeti feltétellel.

10.4. Feladat. Oldjuk meg az $y' - 3y = 0$ differenciálegyenletet $y(1) = -2$ kezdeti feltétellel

10.5. Feladat. Határozzuk meg az $y'' - 5y' + 6y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

10.6. Feladat. Oldjuk meg az $y'' + 6y' + 9y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétellel.

10.7. Feladat. Oldjuk meg az $y'' + 2y' + 10y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = y'(0) = 1$ kezdeti feltéltel mellett.

10.8. Feladat. Határozzuk meg az $y^{(4)} + 4y'' = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 8$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

10.9. Feladat. Oldjuk meg az $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}\cos x$ differenciálegyenletet.

10.10. Feladat. Melyik függvény az $y'' + 9y = 18\cos 3x$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása?

10.11. Feladat. Határozzuk meg a $6y'' - 5y' + y = 15xe^{2x} - 2\cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

10.12. Feladat. Oldjuk meg az $y''' + 2y'' + y' = x + \cos x$ differenciálegyenletet $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

11. Megoldás sorfejtéssel, Laplace-transzformáció

11.1. Feladat. Oldjuk meg sorfejtéssel az $y' = x + y$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

11.2. Feladat. Sorfejtés segítségével határozzuk meg az $(1-x)y'' + xy' - y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = y'(0) = 1$ feltételt kielégítő megoldását.

11.3. Feladat. Határozzuk meg az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \cos^2 t$ függvény Laplace-transzformáltját.

11.4. Feladat. Legyen $0 < a < b$. Mi az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{ha } a \le t < b \\ 1 & \text{ha } t \ge b \end{cases}$$

függvény Laplace-transzformáltja?

11.5. Feladat. Számoljuk ki az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^{-1/2}$ függvény Laplace-transzformáltját.

11.6. Feladat. Mi az $f(t) = \operatorname{sgn}\sin(\pi t)$ függvény Laplace-transzformáltja?

11.7. Feladat. Laplace-transzformáció segítségével oldjuk meg az $y'' + 2y' + 2y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

11.8. Feladat. Határozzuk meg Laplace-transzformációval az $y''' + y = 1$ differenciálegyenlet $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

11.9. Feladat. Laplace-transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az $xy'' + 2y' + xy = 0$ differenciálegyenletet.

12. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

12.1. Feladat. Mi a Jordan-felbontása az

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$$

mátrixnak?

12.2. Feladat. Adjuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan-felbontását.

12.3. Feladat. Adjuk meg az

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= -9y_1 - 7y_2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását.

12.4. Feladat. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - y_2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszert $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$ kezdeti feltétel mellett.

13. Stabilitásvizsgálat

13.1. Feladat. Instabilis vagy stabilis az

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 3y_2 + 2y_3 \\ y_2' &= -y_2 - 2y_3 \\ y_3' &= 2y_1 + 3y_2 - y_3 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer? Igaz-e, hogy aszimptotikusan stabilis?

13.2. Feladat. Hol vannak és milyen típusúak stabilitás tekintetében az

$$y' = y - y^3$$

differenciálegyenlet stacionárius pontjai?

13.3. Feladat. Mik a stacionárius pontjai az

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2 + y_2 - y_1y_2 - 2 \\ y_2' &= -y_1^2 - 2y_2 + y_1y_2 + 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek? Melyek stabilisak és melyek instabilisak?

13.4. Feladat. Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan-féle normálalakját.

13.5. Feladat. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= -3y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását.

13.6. Feladat. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_2 + y_3 \\ y_3' &= -2y_3 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszert $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

13.7. Feladat. Stabilis-e az

$$\begin{aligned} y_1 &= 3y_1 - 9y_2 + 9y_3 \\ y_2 &= -1y_1 + 4y_2 - 5y_3 \\ y_3 &= -2y_1 + 7y_2 - 8y_3 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer?

13.8. Feladat. Stabilis-e az

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_3 + y_4 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 - 2y_4 \\ y_3' &= -y_2 + y_3 + 2y_4 \\ y_4' &= -2y_1 + y_2 - y_4 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer?

13.9. Feladat. Hol vannak az

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2^3 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontjai? Ezek közül melyik instabilis illetve aszimptotikusan stabilis?

13.10. Feladat. Mik az

$$\begin{aligned} y_1' &= \sin y_1 + \sin y_2 \\ y_2' &= -\sin y_1 + \sin y_2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontjai? Melyek stabilisak ezek közül?

13.11. Feladat. A csillapított síkinga mozgásegyenlete $y'' + 2\alpha y' + \sin(y) = 0$, ahol $\alpha > 0$ jelent csillapítást, y a függőlegessel bezárt szöget jelenti ($y = 2k\pi$ lefelé, $y = (2k+1)\pi$ pedig felfelé). Mik az egyensúlyi pontok és melyek stabilisak?

13.12. Feladat. Mik az

$$\begin{aligned} y_1' &= (1 - y_1^2 - y_2^2)y_1 \\ y_2' &= (1 - y_1^2 - y_2^2)y_2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontjai? Milyen típusúak stabilitás tekintetében?

14. További vegyes feladatok

14.1. Feladat. Határozzuk meg az $xyz = 1$ egyenletű felületnek azokat az érintősíkjait, amelyek párhuzamosak az $x + y + z = 5$ egyenletű síkkal.

14.2. Feladat. Mekkora az $\mathbf{r}(t) = at\mathbf{i} + \sqrt{3ab}t^2\mathbf{j} + 2bt^3\mathbf{k}$ görbe $-1 \le t \le 1$ szakaszának ívhossza, ha $a, b > 0$?

14.3. Feladat. Számítsuk ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$ vektormező integrálját az $y = 3 - 2x$, $z = 0$ egyenletrendszerű egyenes $x = 1$ pontjától az $x = -2$ pontjáig.

14.4. Feladat. Vékony homogén lemezből h magasságú kúppalástot hajlítunk, az alapkör sugara R. Hol van a kapott test tömegközéppontja?

14.5. Feladat. Integráljuk az $\mathbf{u}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ vektormezőt az origó középpontú egységgömb felszínének $z \ge 0$ felén kifelé mutató irányítás mellett.

14.6. Feladat. Számítsuk ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $ABCD$ négyzet mentén ebben a sorrendben körüljárva, ha $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 0)$ és $D = (0, 1, 0)$.

14.7. Feladat. Számoljuk ki az $y' = (\sin x)y$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának szukcesszív approximációjával kapott első három közelítő függvényt.

14.8. Feladat. Oldjuk meg az $y \cosh x + (\sinh x - 2y)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

14.9. Feladat. Határozzuk meg az $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

14.10. Feladat. Laplace-transzformáció segítségével határozzuk meg az $y'' - 2y' + y = x$ differenciálegyenlet $y(0) = 0$ $y'(0) = -1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

14.11. Feladat. Hol vannak az

$$\begin{aligned} y_1' &= (y_1 - 1)^2 + y_2^2 - 2 \\ y_2' &= (y_1 + 1)^2 + y_2^2 - 2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontjai és milyen típusúak stabilitás tekintetében?