1. Számoljuk ki a következő impropius integrálokat:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^3\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,dx$ d) $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ g) $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$ h) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

i) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$ j) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx$ k) $\displaystyle\int_{-\infty}^2 \frac{2}{x^2+4}\,dx$ l) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(3x-2)^2}\,dx$

2. Határozzuk meg $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ deriváltját.

a) $\displaystyle A(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$ b) $\displaystyle B(x)=\int_0^{4x} \sqrt{1+t^8}\,dt$

c) $\displaystyle C(x)=\int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$ d) $\displaystyle D(x)=\int_x^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$

3. Számoljuk ki a következő határértékeket:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+t)\,dt}{x^2}=?$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x} \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}=?$

4. Mennyi a következő függvények x tengely körüli pörgetésével kapott testek felszíne, térfogata?

a) $a(x)=x \quad (x\in[0,6])$ b) $b(x)=\sqrt{x} \quad (x\in[0,9])$

c) $c(x)=[x] \quad (x\in[0,4])$ d) $d(x)=\sqrt{r^2-x^2} \quad (x\in[-r,r])$

5. * Tekintsük az $f(x)=1/x$, $x\in[1,\infty)$ függvény x tengely körüli megpörgetésével keletkező végtelen „vázát".

a) Lássuk be, hogy a váza felszíne végtelen, a térfogata véges.

b) Próbáljuk meg a vázát befesteni pirosra. Sikerülhet ez, ha a felszíne végtelen? És ha teletöltjük a vázát festékkel, majd kiöntjük? Akkor befestődik belülről! Hogyan lehet ez?

Emlékeztető

– Az *impropius integrálnak* két alapesete van:
1) Ha az integrációs tartomány nem korlátos. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor $\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim\limits_{\omega\to\infty}\int_a^\omega f(x)\,dx$, ha ez a határérték létezik. Hasonlóan definiálható $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$. $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx=\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx+\int_0^\infty f(x)\,dx$, amennyiben az összeg létezik.
2) Ha a függvény nem korlátos. Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nem korlátos, de korlátos és integrálható tetszőleges $\varepsilon>0$-ra az $[a+\varepsilon,b]$ intervallumon. Ekkor $\int_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$, ha ez a határérték létezik.

– Az $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ függvény az $f(x)$ *integrálfüggvénye*. Amennyiben f integrálható és létezik primitív függvénye, akkor F az f egy primitív függvénye lesz.

– Ha az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonosan diffható függvény grafikonját az x tengely körül megpörgetjük, akkor a kapott test felszíne: $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, térfogata: $\pi\int_a^b f(x)^2\,dx$.