1. Írjuk fel az $y' = e^{y+2} - x$ differenciálegyenlet izoklínáinak egyenletét, és rajzoljunk fel kettőt. Van-e lokális szélsőértéke az $P_0(e, -1)$ ponton áthaladó megoldásnak a P_0 pontban?

2. Tekintsük a következő differenciálegyenletet: $y' = (y^2 - 4)x + x - 1$.
   a) A sík mely pontjaiban párhuzamos az iránymező az $y = -x$ egyenessel? Vázoljuk ezeket a pontokat és jelöljünk be néhány vonalelemet!
   b) Van-e lokális szélsőértéke vagy inflexiós pontja az $(1, 2)$ ponton átmenő megoldásnak ebben a pontban? (Feltéve, hogy van ilyen megoldás.)

3. Oldjuk meg a következő homogén lineáris állandó együtthatós egyenleteket!
   a) $y'' - 8y' + 15y = 0$ b) $y'' + 2y' = 0$ c) $y'' - 8y' + 16y = 0$
   d) $y'' + 4y' + 13y = 0$ e) $y'' + 25y = 0$ f) $y''' + 2y'' + y' = 0$
   g) $y''' + 4y'' + 13y' = 0$ h) $y^{(4)} - y = 0$ i) $y^{(4)} - y^{(3)} = 0$

4. Írjunk fel egy olyan legalacsonyabbrendű valós konstans együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet, melynek megoldásai az alábbi függvények! Írjuk fel a differenciálegyenlet általános megoldását is!
   a) $2e^{5x} - e^{-3x}$ b) $6x^2 + 5e^{2x}$ c) $7x,\ \sin 5x$ d) $3x^2e^{2x},\ e^{3x}$

5. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémákat!
   a) $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$ b) $y'' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = -4$
   c) $y'' + 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 7$

Emlékeztető

– A sík minden pontjához, amelyen átmegy a differenciálegyenlet egy megoldása, illesszünk egy kis szakaszt, amely az adott ponton átmenő megoldást érinti. Az így kapott $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény a d.e. *iránymezője*. Ha a differenciálegyenlet $y' = f(x, y)$ alakú, akkor az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban az iránymező meredeksége $f(x_0, y_0)$.
Az *izoklína* azon pontok halmaza a síkon, melyekben az iránymező azonos irányba mutat. Ha a differenciálegyenlet $y' = f(x, y)$ alakú, akkor az izoklínák egyenlete $f(x, y) = K$, ahol $K \in \mathbb{R}$ az iránymező kérdéses meredeksége.

– A *másodrendű homogén lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet* $y'' + ay' + by = 0$ alakú $(a, b \in \mathbb{R})$. Ha ennek egy megoldását $e^{\lambda x}$ alakban keressük, akkor ezt visszaírva az egyenletbe, az egyszerűsítések után λ-ra a $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ *karakteriszitkus polinom* adódik. Legyen ennek két megoldása λ_1 és λ_2. Ekkor az általános megoldások:
Ha $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.
Ha $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2$: $y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2xe^{\lambda_1 x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.
Ha $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = p + qi$, $\lambda_2 = p - qi$: $y(x) = c_1e^{px}\cos qx + c_2e^{px}\sin qx \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

– Egy *n-edrendű homogén lineáris állandó együtthatós de.*, azaz $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$ alapmegoldásait $e^{\lambda x}$ alakban keressük. Visszahelyettesítve a $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ *karakterisztikus polinom* adódik. Ha ennek λ_i k_i-szeres valós gyöke, akkor ebből az $e^{\lambda_i x}$, $xe^{\lambda_i x}$, $x^{k_i-1}e^{\lambda_i x}$ megoldások adódnak. Ha $\lambda_j = (a_j + ib_j)$, $\bar{\lambda_j} = (a_j + ib_j)$ k_j-szeres gyökök, akkor az általuk adott $2k_j$ számú megoldás: $e^{a_j}\cos b_jx$, $e^{a_j}\sin b_jx$, $xe^{a_j}\cos b_jx$, $xe^{a_j}\sin b_jx$, $x^{k_i-1}e^{a_j}\cos b_jx$, $x^{k_i-1}e^{a_j}\sin b_jx$.