1. Oldjuk meg a következő inhomogén lineáris, állandó együtthatós egyenleteket!

a) $y'' - 5y' + 6y = 2\sin 2x$
b) $y'' - 5y' + 6y = 2xe^x$
c) $y'' - 6y' + 13y = 39$
d) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 3, y'(0) = 1$
e) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + 4x^2 - 6$
f) $y'' - 3y' + 2y = x + e^x$
g) $y'' - 2y' + y = 6e^x$
h) $y'' + 8y' + 25y = e^{-4x}$
i) $y'' + 2y' = 2x + 3$
j) $y'' + y = \sin x$

2. Számoljuk ki a következő improprius integrálokat:

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$
b) $\int_{-\infty}^\infty x^3\,dx$
c) $\int_0^\infty \sin x\,dx$
d) $\int_3^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}\,dx$

e) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$
f)$^{\text{hf}}$ $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$
g)$^{\text{hf}}$ $\int_0^{1/e} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$
h)$^{\text{hf}}$ $\int_0^1 \ln x\,dx$

i)$^{\text{hf}}$ $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$
j)$^{\text{hf}}$ $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx$
k)$^{\text{hf}}$ $\int_{-\infty}^2 \frac{2}{x^2+4}\,dx$
l)$^{\text{hf}}$ $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(3x-2)^2}\,dx$

Emlékeztető

– Az *n-edrendű inhomogén lineáris egyenlet* $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(x)$ alakú. Ekkor a megoldások $y_h + y_p$ alakúak, ahol y_h a homogén egyenlet általános megoldása, y_p pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása. Ha $f(x)$ speciális, akkor y_p-t az alábbi alakban keressük (próbafüggvény módszere):
$f(x) = Ke^{\alpha x}$ esetén $y_p = Ae^{\alpha x}$ alakú, $(A \in \mathbb{R})$
$f(x) = a_m x^m + \ldots + a_0 x + a_0$ esetén $y_p = B_m x^m + \ldots + B_1 x + B_0$ alakú, $(B_i \in \mathbb{R})$
$f(x) = K_1 \sin\alpha x$ vagy $f(x) = K_1 \cos\alpha x$ esetén $y_p = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x$ alakú. $(A, B \in \mathbb{R})$.
Ha f a fenti típusú függvények összege, szorzata, akkor a kísérletező függvényeket is össze kell adni, szorozni. Ha a kísérletező függvény szerepel a homogén egyenlet megoldásai között is (*külső rezonancia*), akkor ez nem lesz jó. Ekkor y_p-t x első olyan hatványával kell megszorozni, hogy már ne szerepeljen a homogén megoldások között.

– Az *impropius integrálnak* két alapesete van:
1) Ha az integrációs tartomány nem korlátos. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor $\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{\omega\to\infty}\int_a^\omega f(x)\,dx$, ha ez a határérték létezik. Hasonlóan definiálható $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$. $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx$, amennyiben az összeg létezik.
2) Ha a függvény nem korlátos. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nem korlátos, de korlátos és integrálható tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra az $[a+\varepsilon, b]$ intervallumon. Ekkor $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$, ha ez a határérték létezik.