1. Valós vektorterek-e a következő halmazok? Ha igen, határozzuk meg a dimenziójukat, és véges dimenzió esetén adjuk meg egy bázisukat! Adjunk meg néhány alteret bennük!
   - a) egész számok
   - b) valós számok
   - c) a valós számpárok
   - d) $P_n = \{$maximum n-edfokú polinomok$\}$
   - e)[hf] a legalább n-edfokú polinomok
   - f) a valós számegyenesen folytonos függvények
   - g)[hf] az $\mathbb{R}$-en értelmezett páros függvények
   - h)[hf] az $\mathbb{R}$-en értelmezett, felülről korlátos függvény

2. Lássuk be, hogy $\mathbb{R}^2$-ben bázist alkot a $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektorpár. Állítsuk elő e két vektor lineáris kombinációjaként a következő vektorokat:
   - a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
   - b) $\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$
   - c)[hf] $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Írjuk fel a megadott vektorok koordinátáit a $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ bázisban!
   - a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
   - b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
   - c)[hf] $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

4. Egy vektortérben $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárisan független vektorok. Lineárisan független-e az $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, $(\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c})$, $(\vec{a} + 4\vec{b} + 5\vec{c})$ rendszer?

5. Végezzük el az összes lehetséges szorzást A, B, C, A^T, B^T, C^T között!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

6. Számoljuk ki a következő mátrixok determinánsát:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ c)[hf] $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ d)[hf] $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Emlékeztető

- V *valós vektortér*, ha $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ esetén $(\vec{v}_1 + \vec{v}_1) \in V$, és $\vec{v} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $(\alpha\vec{v}) \in V$ is, továbbá teljesülnek a megszokott azonosságok: kommutativitás, disztributivitás.
- Az $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ vektorok $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ együtthatókkal vett *lineáris kombinációja*: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i$.

  $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *lineárisan függetlenek*, ha nemtriv. lin. kombinációiként nem áll elő a $\vec{0}$ vektor.
  Az $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vektorok által *generált altér* azon vektorok halmaza, amelyek előállnak a vektorok lineáris kombinációiként.
  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *generátorrendszer*, ha az általuk generált altér a teljes vektortér.
  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *bázis*, ha linárisan függetlenek, és generátorrendszert alkotnak.
  Egy vektortér *dimenziója* a bázisainak az elemszáma.