

1. Számoljuk ki a következő függvények parciális deriváltjait!

a) $f(x, y) = \frac{x^2 e^{x+y^2}}{2x^2 + 1} + \ln(x^4 + 1) + (2y + 1)^6$ b) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2x - 5y + \ln 2$

2. Legyen $f(x, y) = \sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}$. Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket! (Az $(1, 0)$ pontban használjuk a definíciót.)

3. Legyen $f(x, y) = (2x - y)^4 + 4x^3 - 8y^2$. Számoljuk ki az első és másodrendű parciális deriváltakat! Hol deriválható (totálisan) a függvény? Mivel egyenlő $\text{grad } f(1, 2)$?

4. Legyen $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-2)y^2}{x^2+y^2} + 6x + 3y, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$ Mivel egyenlő $f'_x(x, y)$ és $f'_y(x, y)$?

Hol differenciálható (totálisan) f ?

5. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2+2x^2)}{\sqrt{y^2+2x^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = ?$ Folytonos-e f az origóban?

b) $f'_x(0, 0) = ?$ (Használjuk a definíciót!)

c) Totálisan deriválható-e f az origóban?

6. Adott az $f(x, y, z) = x^3 + y^4 + x^2 y e^{2z}$ függvény. Mivel egyenlő $\text{grad } f(-1, 1, 0)$? Miért létezik? $f'''_{xxz} = ?$ $f'''_{xzx} = ?$

7. Írjuk fel $f(x, y) = (2x - y)^2 + 4x^2 - 8y$ függvény $P_0(1, 2)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

8. Írjuk fel az $f(x, y, z) = x^2 y + yz - 5z^2$ függvény gradiensét! Miért létezik a gradiens? Számítsuk ki az f függvény $P_0(0, 10, 1)$ pontbeli $\mathbf{v} = (-3, 4, 0)$ irányú deriváltját!

9. Adott az $f(x, y) = 3y + e^{xy^2} - 2y \arctg \frac{x}{y}$ függvény és a $P_0(0, 1)$ pont.

a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$, ha $y \neq 0$

b) Írjuk fel az f függvény P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét!

c) Mennyi az f függvény P_0 pontbeli $\mathbf{v} = (2, -7)$ irányú deriváltja?

d) Adjuk meg az f függvény P_0 pontbeli iránymenti deriváltjának maximumát (minimumát), és adjuk meg a maximumhoz (minimumhoz) tartozó irányt.

10. Az $f(x, y) = \frac{y^3}{e^{2x+1}}$ képlettel megadott felületre a $(-\frac{1}{2}, 1)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk. Merre fog elindulni? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?

11. Legyen $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0); \\ -3 & \text{egyébként.} \end{cases}$

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = ?$ Folytonos-e f az origóban?

b) $f'_x(x, y) = ?$ $f'_y(x, y) = ?$ (Az origóban használjuk a definíciót!)

c) Mennyi az f függvény $(1, -1)$ pontbeli $\mathbf{v} = (-5, 1)$ irányú deriváltja?

d) Adjuk meg az f függvény $(1, -1)$ pontbeli iránymenti deriváltjának maximumát és minimumát!

e) Írjuk fel az f függvény $(1, -1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!