A Laplace-transzformált definíciója

Az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$.
Tétel: Ha $f(t)$ szakaszonként folytonos, és alkalmas $M, \alpha \in \mathbb{R}$-el $f(t) < Me^{\alpha t}$, akkor $f(t)$-nek létezik Laplace-transzformáltja.

A Laplace-transzformáció tulajdonságai

Jelölje $f(t)$ Laplace-transzformáltját $F(s)$. Ekkor:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\}(s) = aF(s) + bG(s) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(r)\,dr$$

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Néhány alapfüggvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a} \qquad \mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \qquad \mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin(at)\}(s) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2} \qquad \mathcal{L}\{t \cos(at)\}(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{bt} \sin(at)\}(s) = \frac{a}{(s-b)^2 + a^2} \qquad \mathcal{L}\{e^{bt} \cos(at)\}(s) = \frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sh}(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2} \qquad \mathcal{L}\{\mathrm{ch}(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$(n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R})$$

$$\left(\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$