Hausaufgaben 3.

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 2, \quad \mathbf{v}_1 = \alpha \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 12, \quad \mathbf{v}_2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = -1, \quad \mathbf{v}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 8, \quad \mathbf{v}_2 = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 6,$$

$$\mathbf{v}_{12} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \gamma \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -3,$$

$$\mathbf{v}_1 = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \gamma \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vektorraum, Basis

5. Für welchen Wert von c bilden die Vektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ c \\ 3 \end{bmatrix}$$

eine Basis im vierdimensionalen Raum?

Berechnen Sie die Koordinaten von $\mathbf{v} = [1, 0, 0, 0]^T$ in dieser Basis.

$$(c \neq 1;\ [\tfrac{5-c}{1-c}, \tfrac{12}{1-c}, \tfrac{-5}{1-c}, \tfrac{1}{1-c}]^T)$$

Lineare Transformationen

6. Schreiben Sie die Matrix der folgenden linearen Transformation im 3-dim. Raum auf

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (2x_1 + x_3, 3x_1, 4x_2 - x_3 + x_1)$$

7. Es seien $\mathbf{R}$ die Rotation um die y Achse mit $\pi/6$ und $\mathbf{P}$ die Projektion auf die Ebene yz. Führen Sie die folgenden Transformationen an dem Vektor $\mathbf{v}(1, 2, 3)$ durch:

rotieren, dann projizieren,

$$(0, 2, -1/2 + 3\sqrt{3}/2)$$

projizieren, dann rotieren.

$$(3/2, 2, 3\sqrt{3}/2)$$

Ermitteln Sie die Eigenwerte und die invarianten Unterräume von $\mathbf{P}$

($\lambda_1 = 0$: die Projektionsrichtung $t \cdot [1, 0, 0]^T$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$: die yz Ebene: $u \cdot [0, 1, 0,]^T + v \cdot [0, 0, 1]^T$)

8. Es seien **S** Streckung in der x-Richtung auf das 2-fache und **R** die Rotation um die z-Achse mit $90°$. Führen Sie die folgenden Transformationen an dem Vektor $\mathbf{w}(3, 2, 1)$ durch:
rotieren, dann strecken,

(-4,3,1)

strecken, dann rotieren.

(-2,6,1)

Ermitteln Sie die Eigenwerte und die invarianten Unterräume von **S**.

($\lambda_1 = 2$: x-Richtung $t \cdot [1, 0, 0]^T$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$: yz Ebene: $u \cdot [0, 1, 0]^T + v \cdot [0, 0, 1]^T$)

9. Es seien **S** Spiegelung an der winkelhalbierenden Ebene der Koordinatenachsen x und z, $x - z = 0$ und **R** Rotation um die z-Achse mit $\pi/3$. Führen Sie die folgenden Transformationen an dem Vektor $\mathbf{v}(1, 2, 3)$ durch:
rotieren, dann spiegeln,

$(3, \sqrt{3}/2 + 1, 1/2 - \sqrt{3})$

spiegeln, dann rotieren.

$(3/2 - \sqrt{3}, 1 + 3\sqrt{3}/2, 1)$

Ermitteln Sie die Eigenwerte und die invarianten Unterräume von **S**.

($\lambda_1 = -1$: die Normalenrichtung der Ebene $t \cdot [-1, 0, 1]^T$,
$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$: die Spiegelebene $u \cdot [1, 0, 1]^T + v \cdot [0, 1, 0]^T$)