Hausaufgaben 6.

Reelle Funktionen mehrerer Veränderlicher

1. Rotieren Sie die Kurve $z = \mathrm{e}^x$ um die z Achse, und schreiben Sie die Gleichung der Rotationsfläche auf!

2. Rotieren Sie die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ um die x und um die y Achse, und ermitteln Sie die Gleichungen beider Rotationsflächen!

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{xx}, und f''_{yy} der folgenden Funktionen:

3. $f(x, y) = x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$

4. $f(xy) = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$

5. Ermitteln Sie z'_x und z'_y für die implizite Funktion $e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} = xyz$.

6. Berechnen Sie $z'_x(\frac{\pi}{4}, 0)$ und $z'_y(\frac{\pi}{4}, 0)$ für die Funktion $z = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$.

($\frac{\sqrt{2}}{2}$ und 0)

7. Zeigen Sie, dass die Funktion $z = y\sin(x^2 - y^2)$ die Differentialgleichung $\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}$ erfüllt.

Berechnen Sie die Richtungsableitungen der folgenden Funktionen im gegebenen Punkt:

8. $z = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\mathbf{v}(1, -\sqrt{3})$, $P(3, 4)$ ($\frac{96+72\sqrt{3}}{625}$)

9. $z = \sin xy$, $\alpha = 150°$, $x_0 = \frac{1}{4}$, $y_0 = \pi$ ($\frac{\sqrt{2}}{16} - \frac{\pi\sqrt{6}}{4}$)

10. $z = e^y \ln x - xe^x$, $\alpha = 30°$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ ($\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - 2e)$)

Schreiben Sie die Gleichung der Tangentialebene im gegebenen Punkt auf

11. $z = \arcsin\frac{x}{y}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ ($2x - y - 2\sqrt{3}z + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} = 0$)

12. $z = (x - y)^{x+y}$, $x_0 = 2$, $y_0 = -2$ ($(x + y)\ln 4 - z + 1 = 0$)

13. In welchem Punkt ist die Tangentialebene der Fläche $z = \ln xy$ parallel zu der Ebene $x+y+z = 0$? ($x = -1$, $y = -1$)

14. Berechnen Sie die Ableitung der zusammengesetzten Funktionen mit Kettenregel

$f(x, y) = \mathrm{e}^{x-2y}$, $\quad x(t) = \sin t$, $y(t) = t^3$
$f(x, y, z) = \frac{x}{y} - \frac{z}{x}$, $\quad x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $z(t) = \tan t$

15. Berechnen Sie den Gradienten der Funktionen an den gegebenen Stellen

$u(x, y, z) = \frac{x^2y}{4-z^2}$, $\quad Q(1, 0, 1)$

$(0, 1/3, 0)$

$f(x, y) = x^y$, $\quad Q(1, 1)$

$(1, 0)$

16. In welchem Punkt ist der Gradient Nullvektor, und ist diese Stelle eine Extremstelle?

$f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 2x + y^2 + 1$

($x = 1$, $y = 2$)

$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 - 5x + y + 3$

($x = 3$, $y = -1$)

Ermitteln Sie die lokalen Extremalstellen der folgenden Funktionen:

17. $z = x^3 + 3xy + y^3$ ($x_0 = -1$, $y_0 = -1$, Max.)

18. $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$, $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$

($x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $y_1 = \frac{2\pi}{3}$, Max)
($x_2 = \frac{4\pi}{3}$, $y_2 = \frac{4\pi}{3}$, Min)

19. $z = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$, Min.)
($x_0 = 0$, $y_0 = \pm 1$, Max.)

20. $z = x^2 + x\ln y$ (keine Extremalstelle, im (0,1) Sattelpunkt)

21. Teilen Sie 12 in 3 Teile auf so, dass deren Produkt maximal ist (4, 4, 4)

22. Wir konstruieren einen Box, der oben offen ist und sein Volumen V ist. Wie lang sollen die Kanten sein, damit das verbrauchte Material minimal ist?

(Basiskanten $\sqrt[3]{2V}$, die Höhe $\sqrt[3]{2V}/2$)

23. Welche Punkte haben auf der Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ den maximalen und minimalen Abstand vom Punkt $P(1, 2, 2)$?

(Min. $(2, 4, 4)$, Max $(-2, -4, -4)$)

24. Wir betrachten die Dreiecke, derer Eckpunkte auf dem Kreis mit Radius R liegen. Welches Dreieck hat den Maximalen Flächeninhalt?

(das reguläre, wählen Sie für die Veränderlichen die zu den Seiten gehörenden halben zentralen Winkeln)