Többváltozós függvények 1.

Petz Erika

petzerika@yahoo.com

Áttekintés

- Kétváltozós függvények ábrázolása
- Kis Maple ízelítő
- Parciális deriváltak és geometriai jelentésük
- A gradiens vektor

A kétváltozós függvények ábrázolása

- \- Egyváltozós függvényeket -> görbével ábrázoljuk
- \- Kétváltozós függvényeket -> felülettel ábrázoljuk. E felületet a z=f(x,y) egyenlettel jellemezzük.
- Az ábrákat Maple-el könnyen elkészíthetjük.
- Lássunk néhány példát!

Legyen z=x*x+y*y

AZ ÁBRÁZOLÁS LÉPÉSEI:

- Az ábrázolás első lépéseként megvizsgáljuk a koordinátasíkokkal való metszeteket. Ez alapján szemléltetjük a függvényt.
- Metsszük a felületet a zy síkkal. (x=0) -> metszetgörbe: z=y*y (parabola)
- Hasonlóan: zx síkkal való metszet: z=x*x, szintén parabola

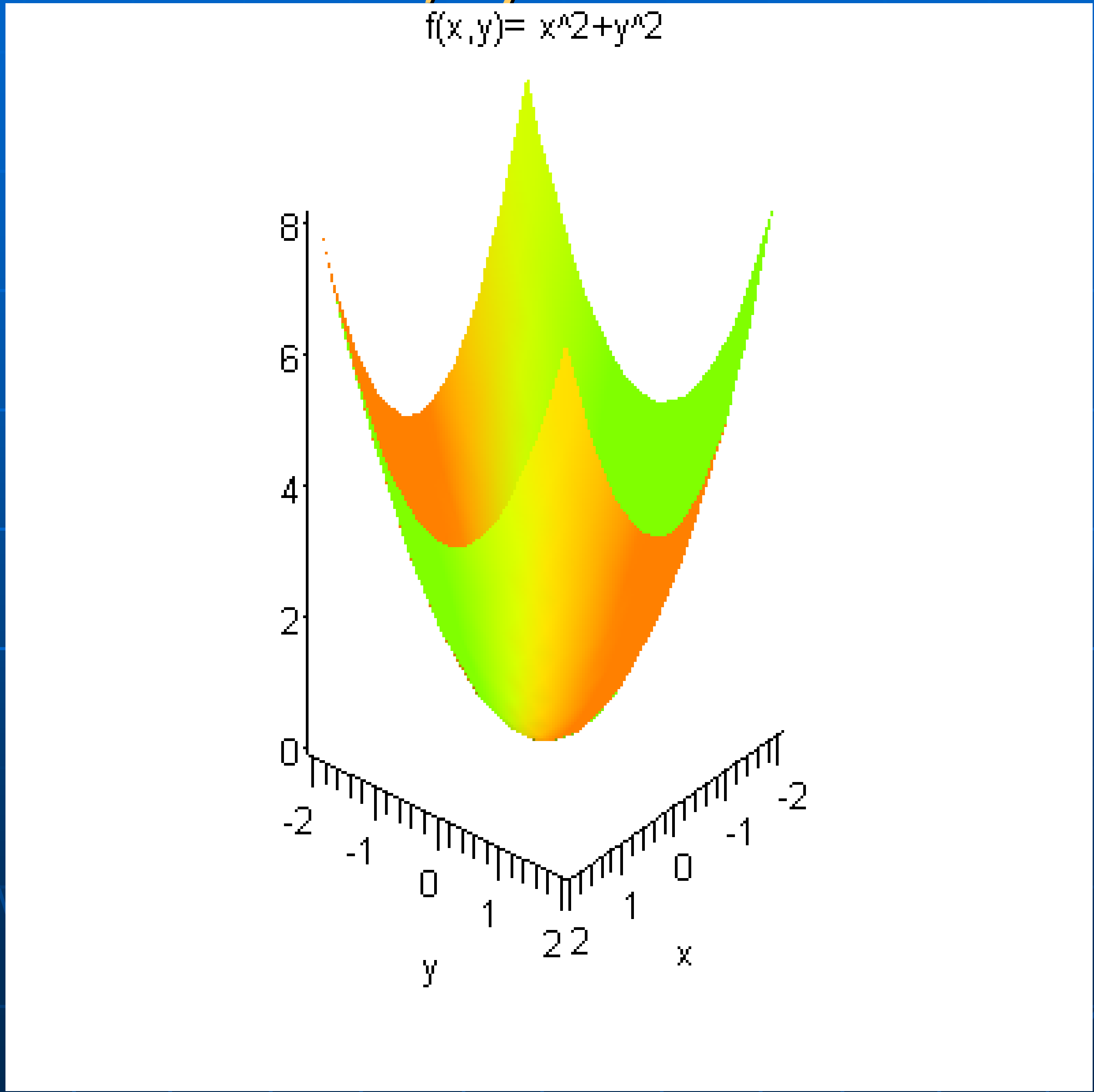
- Az xy síkkal párhuzamos sík legyen z=r*r
- Ezzel a síkkal történő metszés alapján egy r sugarú kör a metszésvonal

- *Összegezve :* 2 parabolát és egy r sugarú kört kaptunk eredményként

- A felületet: z=x*x (v. z=y*y) parabola tengely körüli forgatásával kapjuk

- Ez egy paraboloid. Lássuk!

1).A. F(x,y) = x*x+y*y
x = -2..2, y = -2..2



Az előző függvényt egy leszűkített tartományon ábrázolva

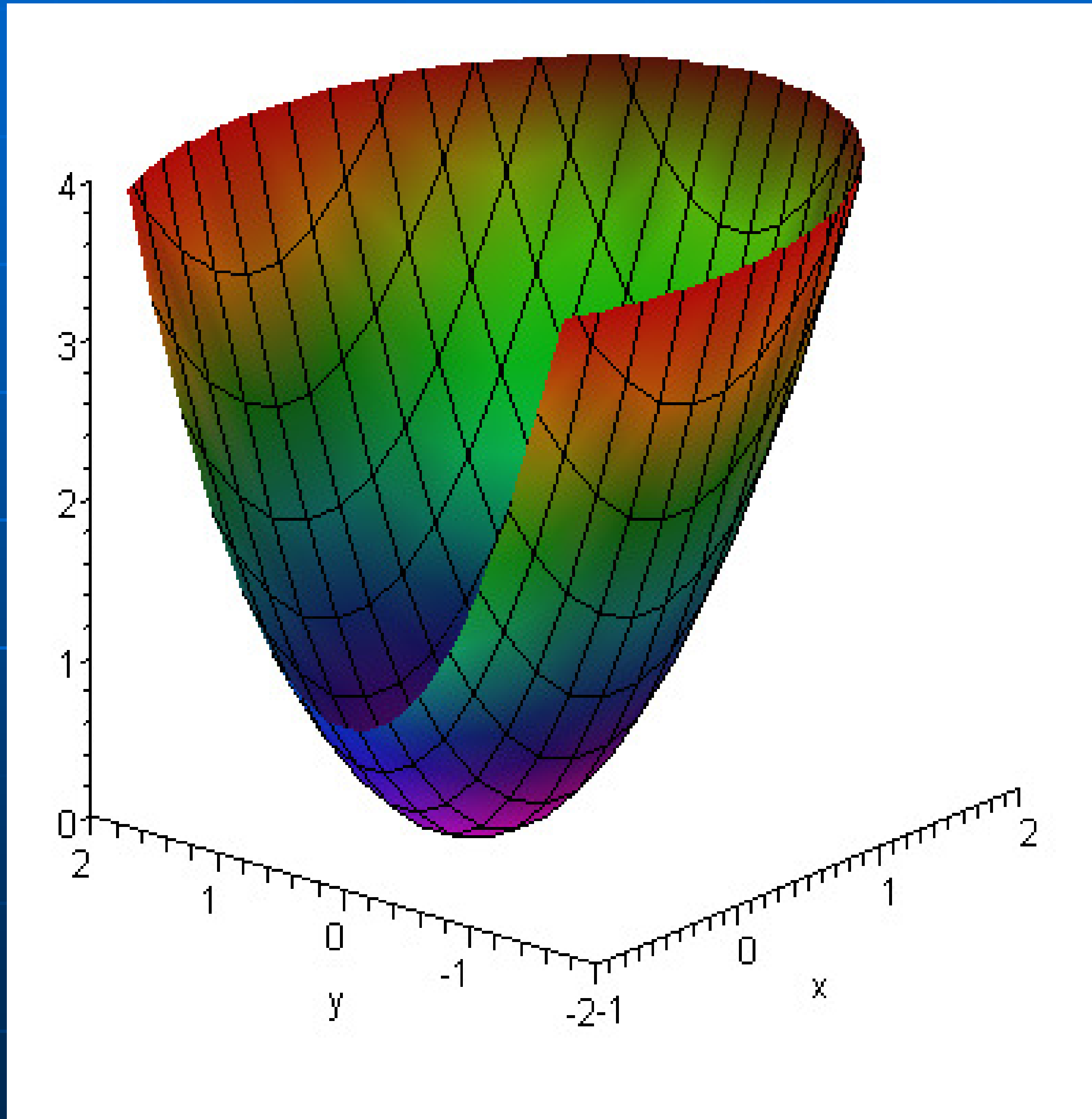
Tartomány:

x = -2..2,

y = -2..2

Maple-ben a következő parancsot is hozzávettük:

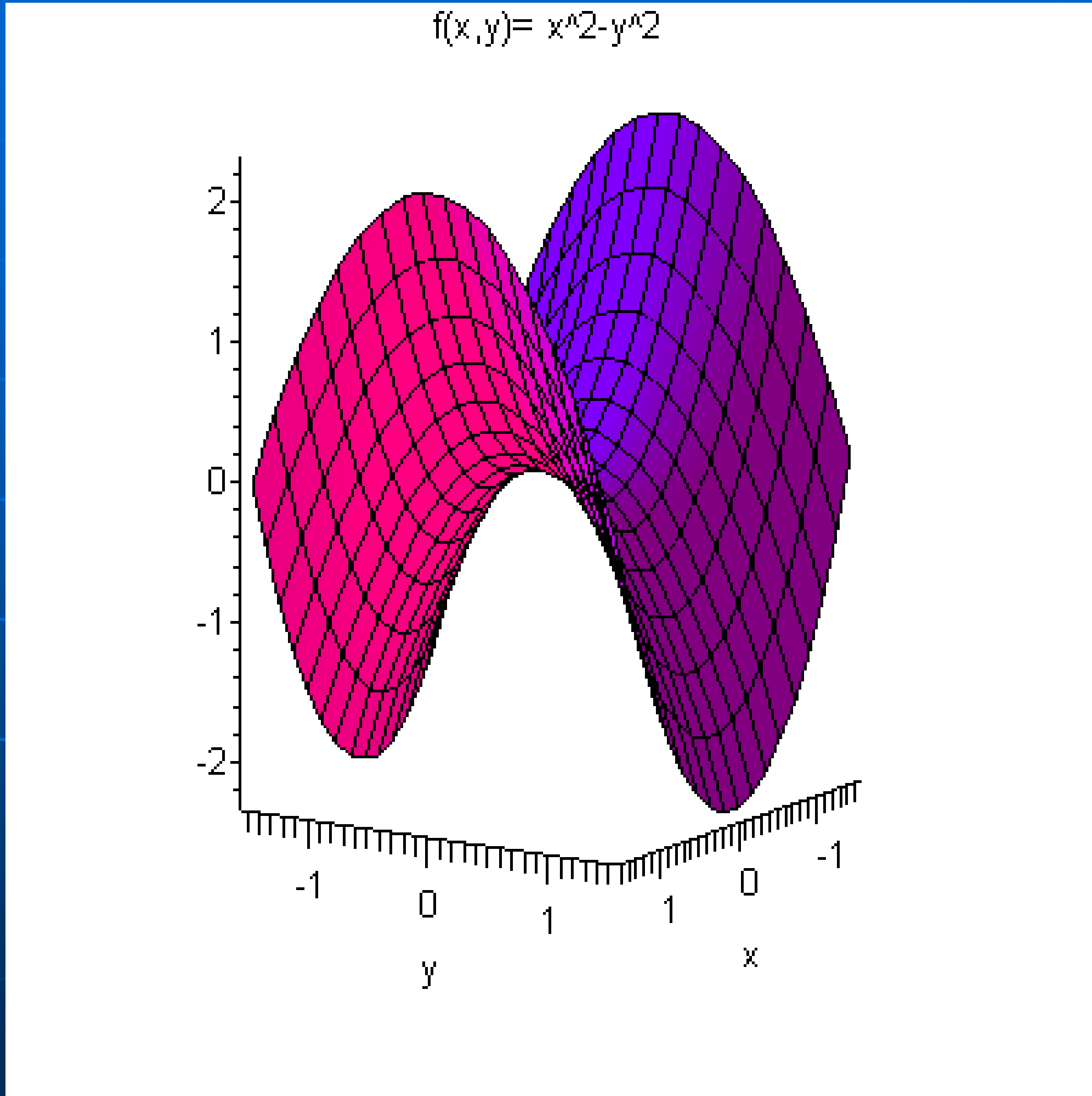
view=[-1..2,-2..2,0..4]



2)F(x,y)=x*x-y*y

A felületet úgy képzeljük el, mintha a z=x*x parabolán „végigcsúszna” a z=-y*y parabola

->nyeregfelület



- Lássunk még néhány példát!

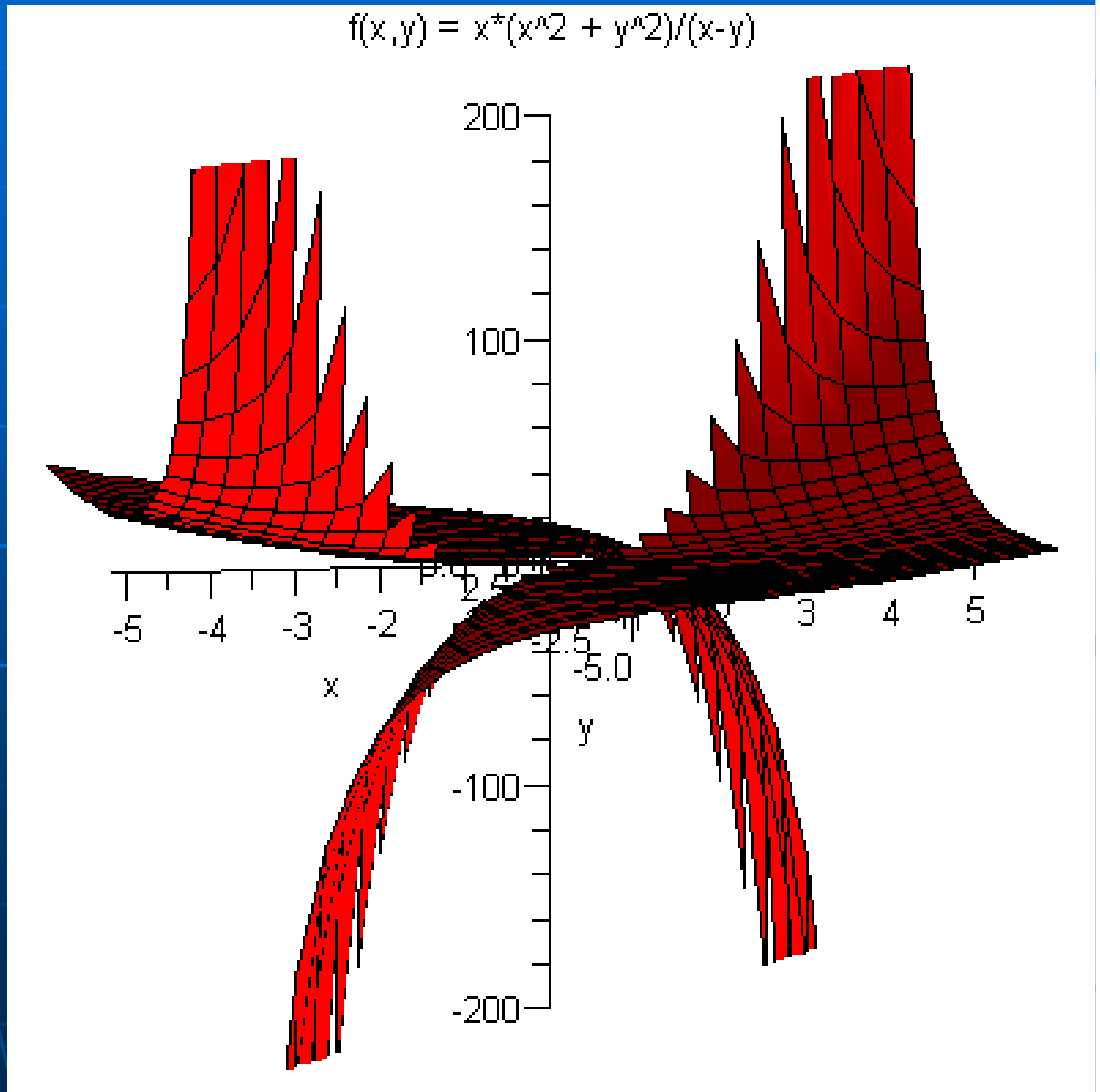
3). F(x,y) = x*(x^2 + y^2)/(x-y);

Tartomány:

X=-5..5

y=-5..5

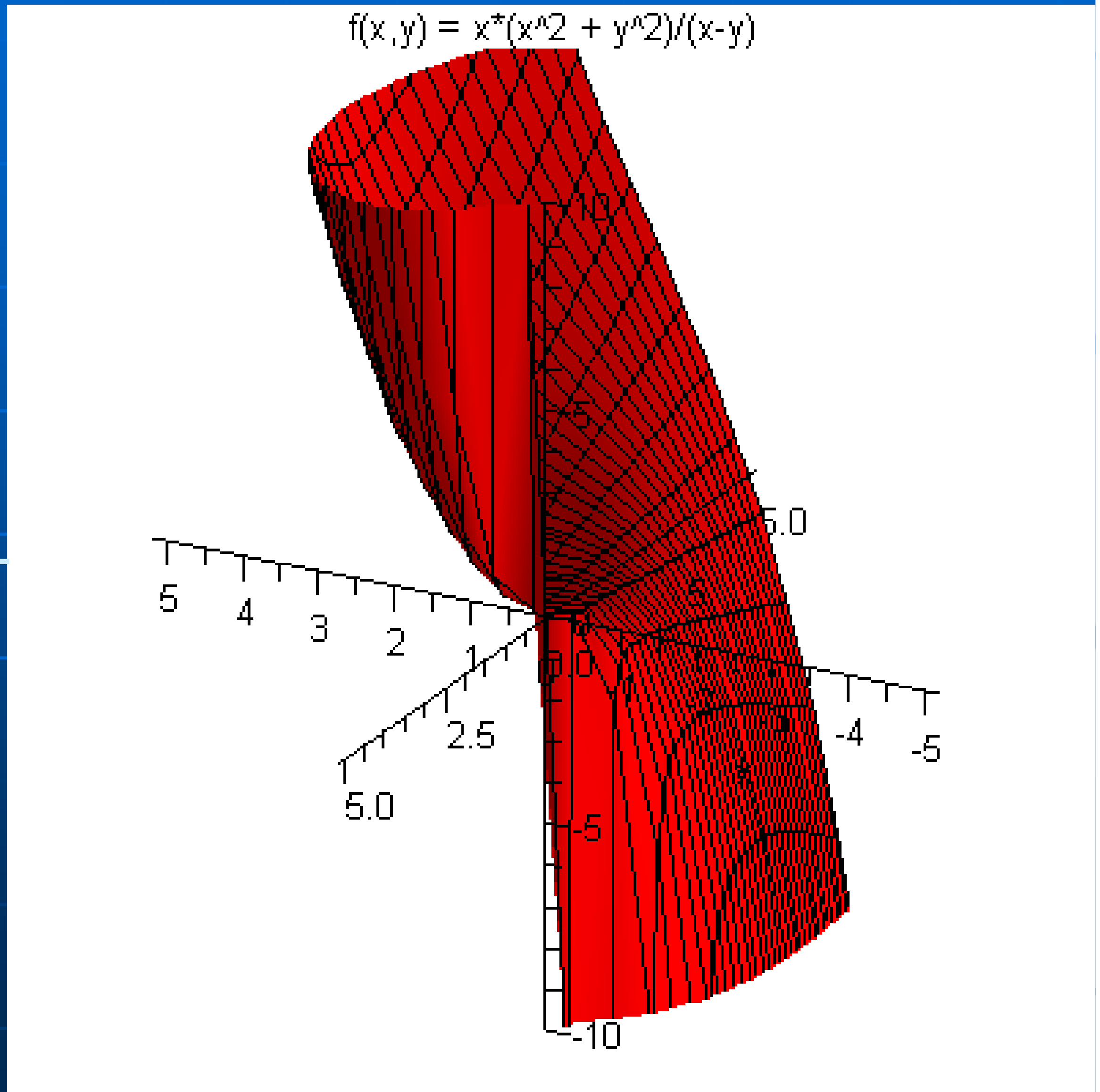
Szakadási helyek: x=y



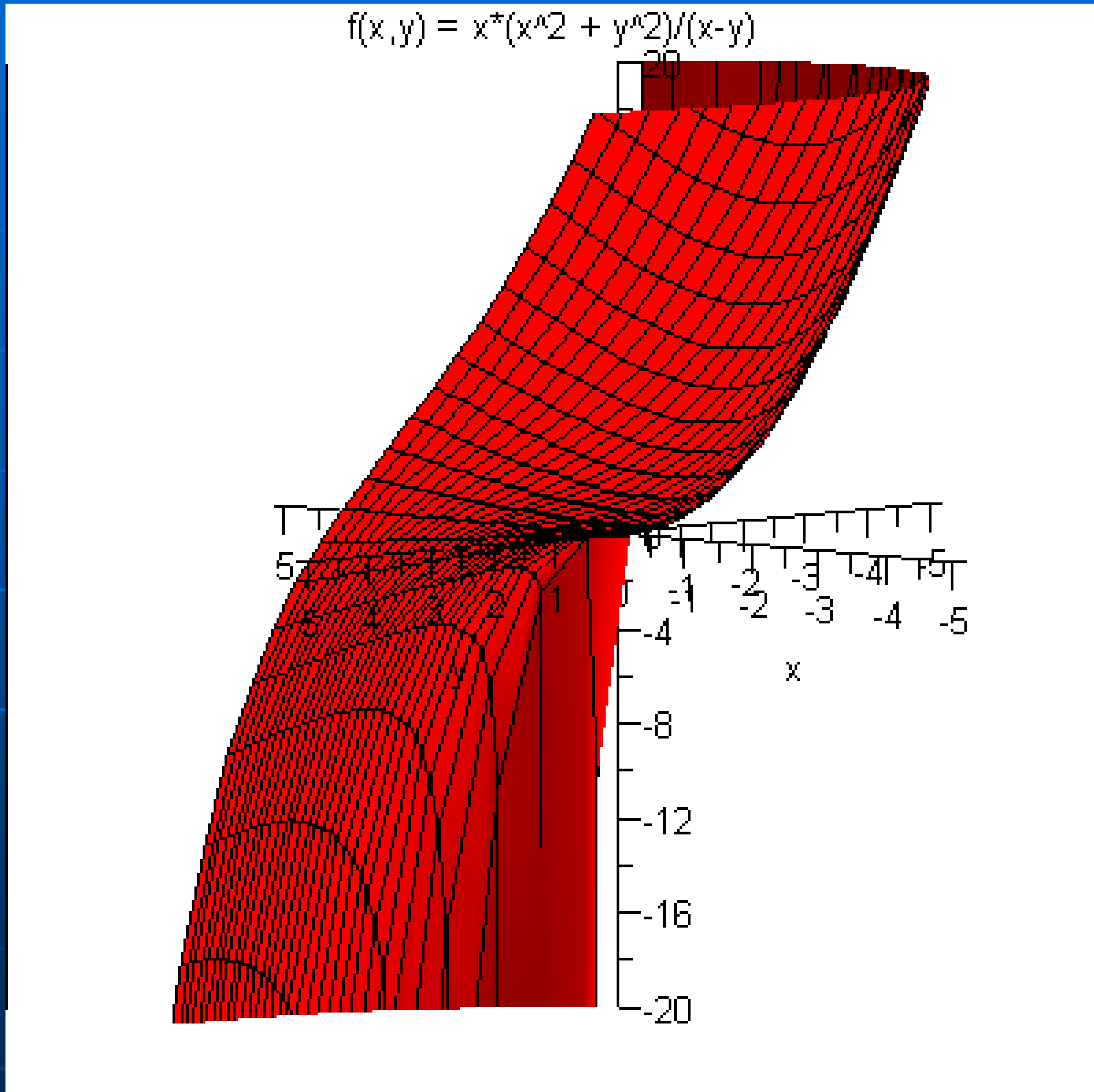
„Szedjük szét” a függvényt

Tartomány:

x = -5..5,
y = -5.001..x-0.001



Tartomány:
x = -5..5,
y =x+0.001..
..4.999,

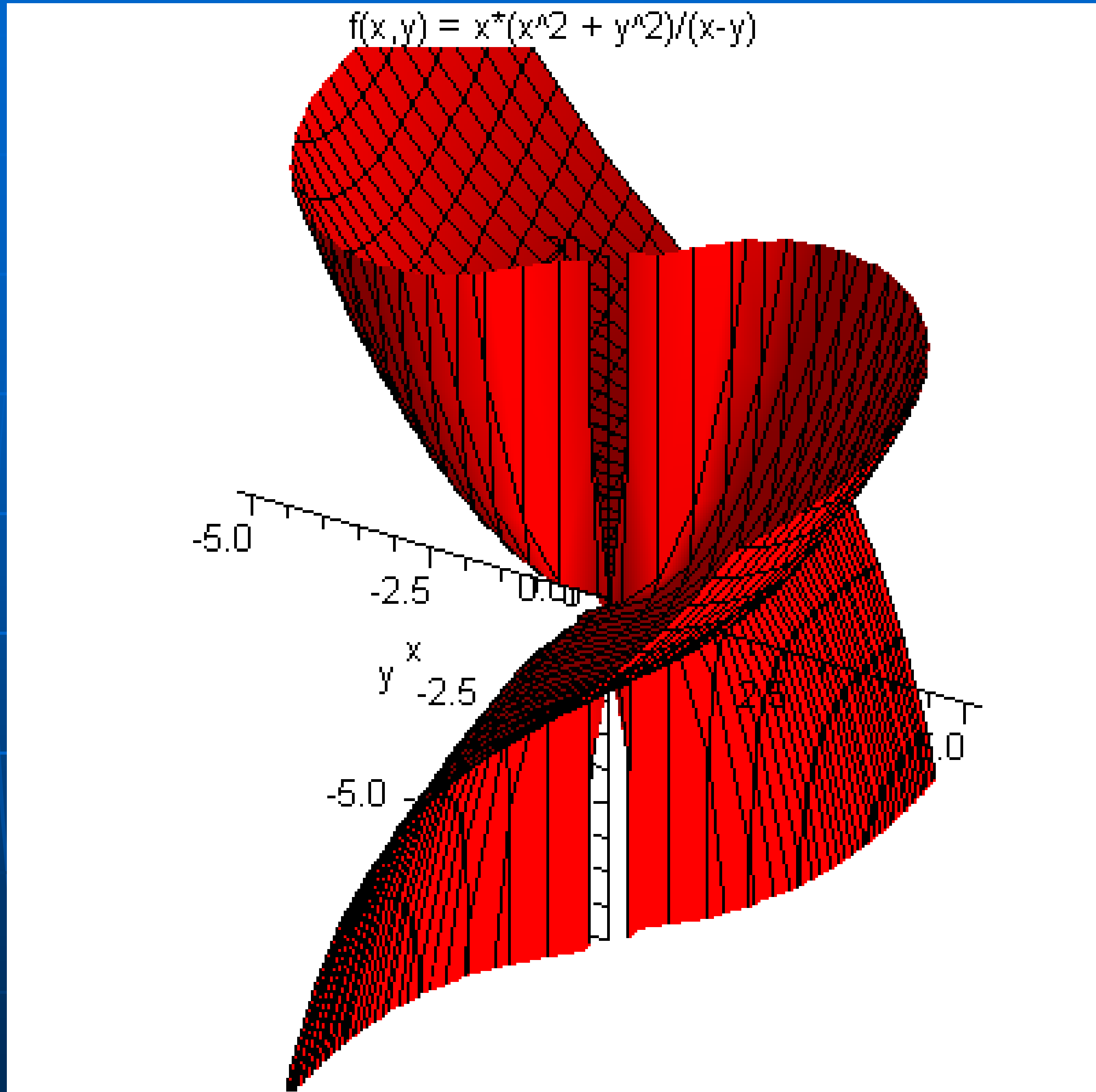


Tartomány:

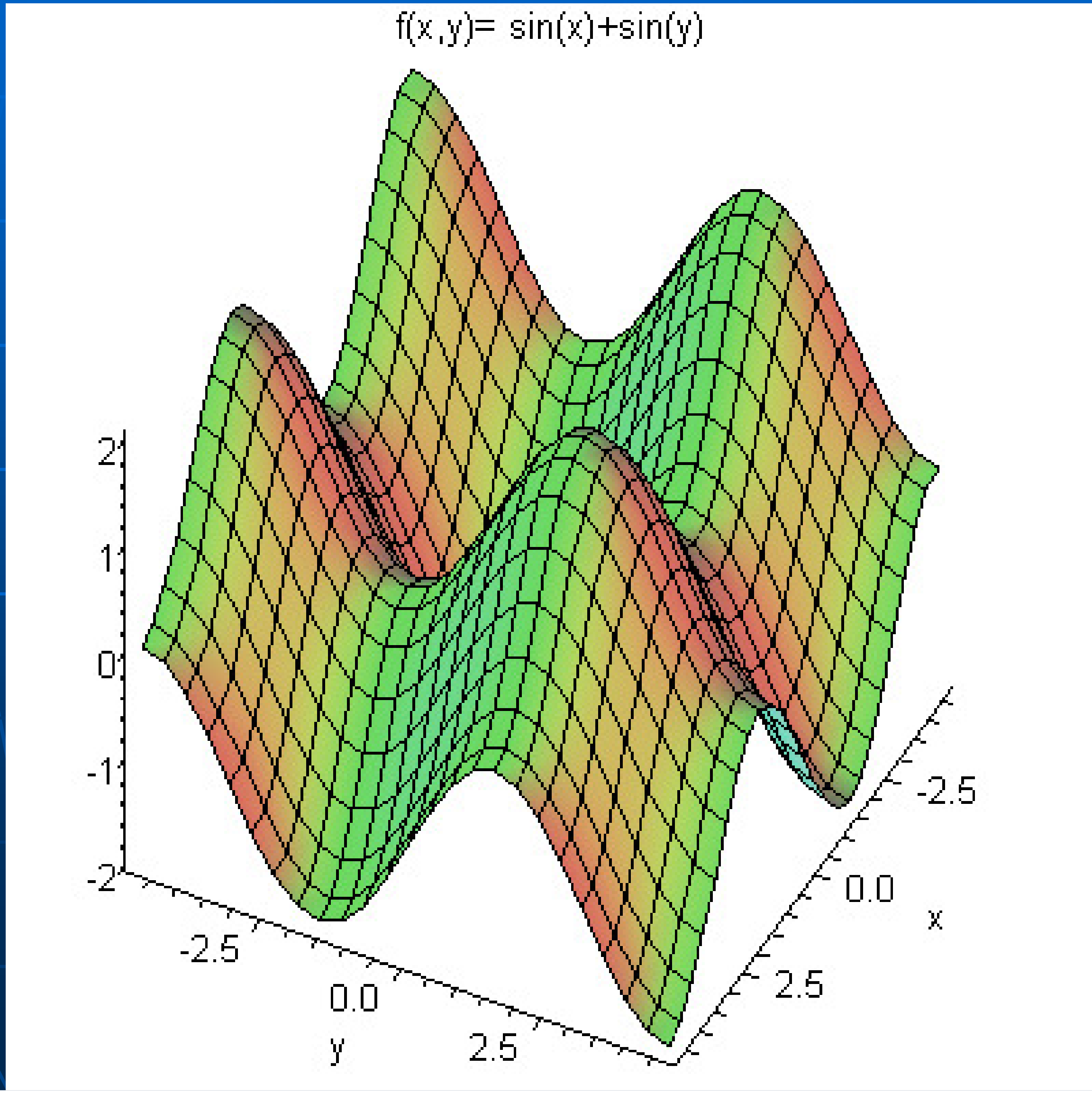
x = -5..5,
y = -5.001..
..x-0.001,

illetve

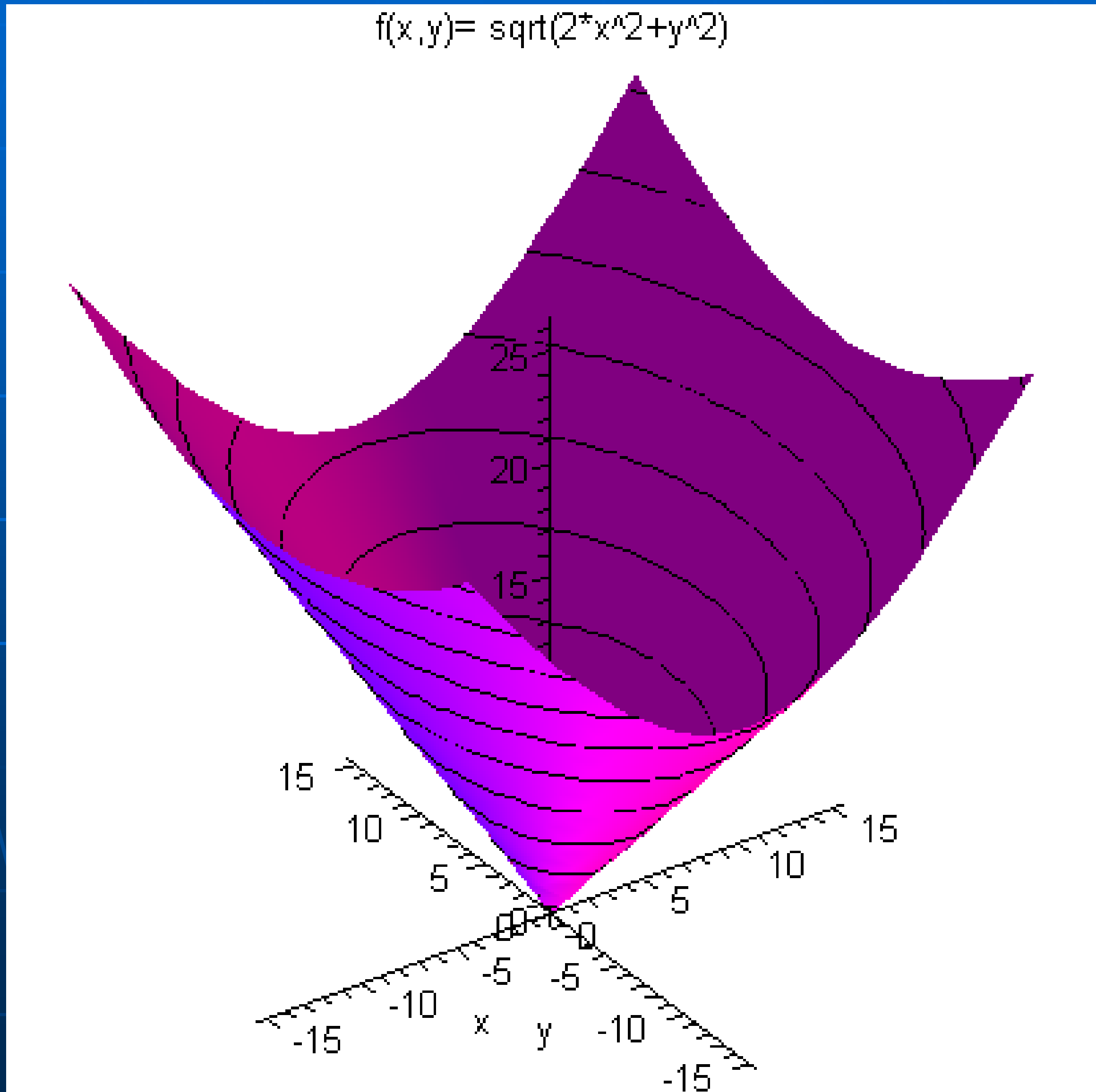
x = -5..5,
y=+0.001..
..4.999



3). F(x,y) = sin(x) + sin(y)
x = -1.5*Pi..1.5*Pi, y = -1.5*Pi..1.5*Pi



4). F(x,y) = sqrt(2*x^2+y^2)
x = -15..15, y = -15..15



Hogyan rajzoljuk ki ezeket a függvényeket? - Kis Maple ízelítő

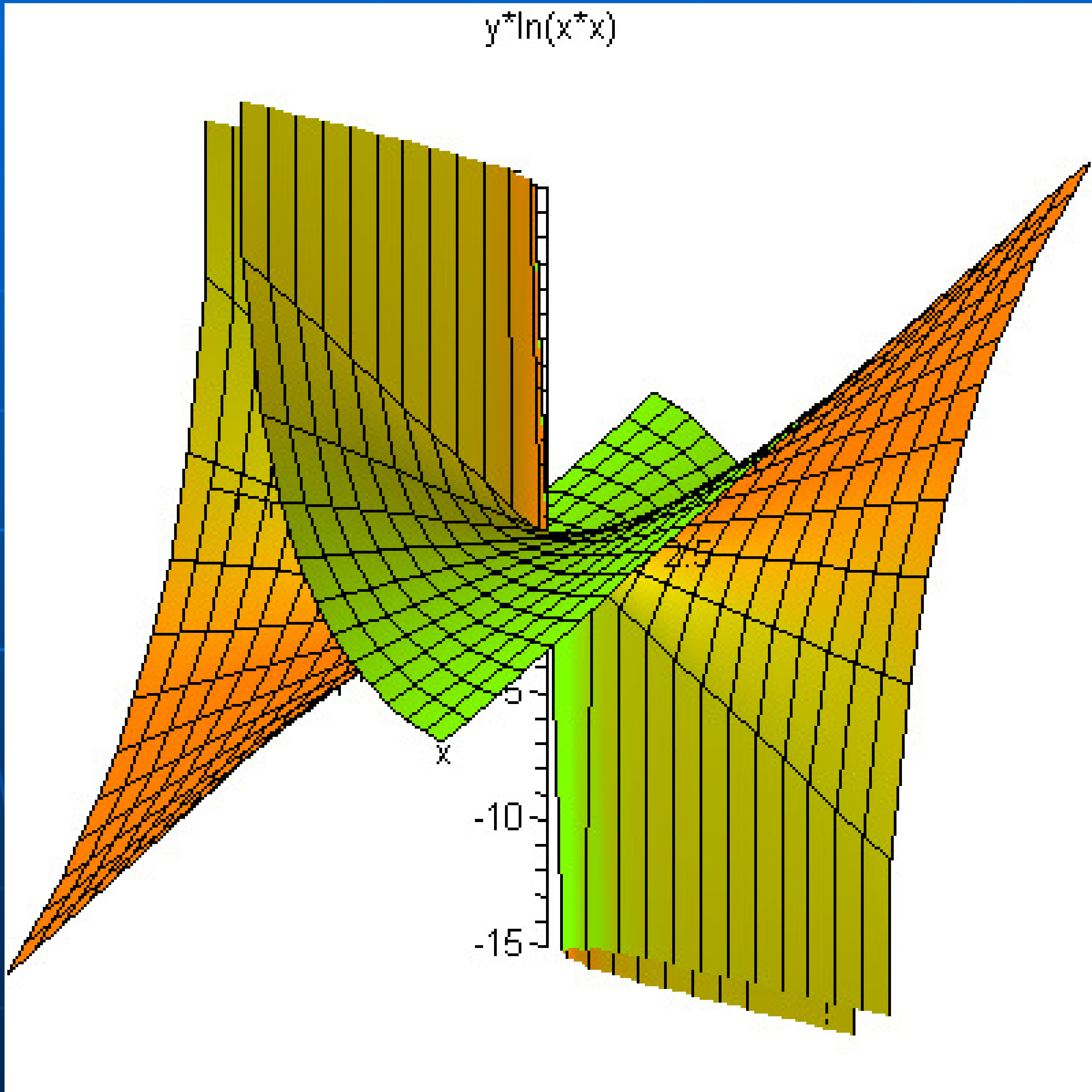
- Használjuk a Maple plot3d() függvényét
- A függvény argumentumai: opciók
- Az opciók lehetnek: tartomány, fényerősség, tengelyek, orientáció stb.
- Lehetőség van az ábra utólagos forgatására

Egy példa..

> z3:= y * ln (x*x);	*definiáljuk a függvényt*
> plot3d (z3,	*<- ezt rajzold ki*
x = -1.5*Pi..1.5*Pi,	*Tartomány*
y = -1.5*Pi..1.5*Pi,	
axes = normal,	*Tengelyek*
lightmodel='light1',	Árnyékolás + fény + szín
shading=xyz,	
color= Yellow,	
title=\`y*ln(x*x)\`);	*Cím*

- Mit csinál a Maple az x=0 pontokban?
  - X=0 pontban az Ln(x*x) végtelenné válik, ezért, hogy ne kapjunk nagyon ellapult felületet, z-re korlátozzuk a kirajzolást
  - View=-15..15 parancsot használunk

És kirajzolva..



- Bővebben a plot3d() opcióiról:

  Frank Garvan: The Maple Book

  Heck: Bevezetés a Maple használatába

A parciális derivált

- *Kis ismétlés:*
  ***parciális derivált**nak nevezzük a többváltós függvények olyan deriváltját, amikor a függvényt egyik változójának függvényeként fogjuk fel, eszerint deriválunk, miközben a többi változót állandónak tekintjük.*

- *Elsőrendű parciális derivált a k-dik változó szerint*

- az f(x,y,z) függvény esetén rögzítsünk két változót, pl. az elsőt és a harmadikat
- egyváltozós függvényt már tudunk deriválni egy pontban -> ez az eredeti függvénynek a 2-dik változó szerinti első parciális deriváltja

- **Eredmény: többváltozós, skalár értékű függvény.**

Példa

- Számítsuk ki:

  *f(x,y)= x^2*y-2*z/(x^2+y^2)* függvény y szerinti első parciális deriváltját!

  Eredmény:

  x^2+ 4zy/(x^2+y^2)^2

Ellenőrzés Maple-ben:

- ***diff(x^2*y-2*z/(x^2+y^2),y); paranccsal***
  - Helyesen dolgoztunk ☺ !

Parciális deriváltak geometriai jelentése

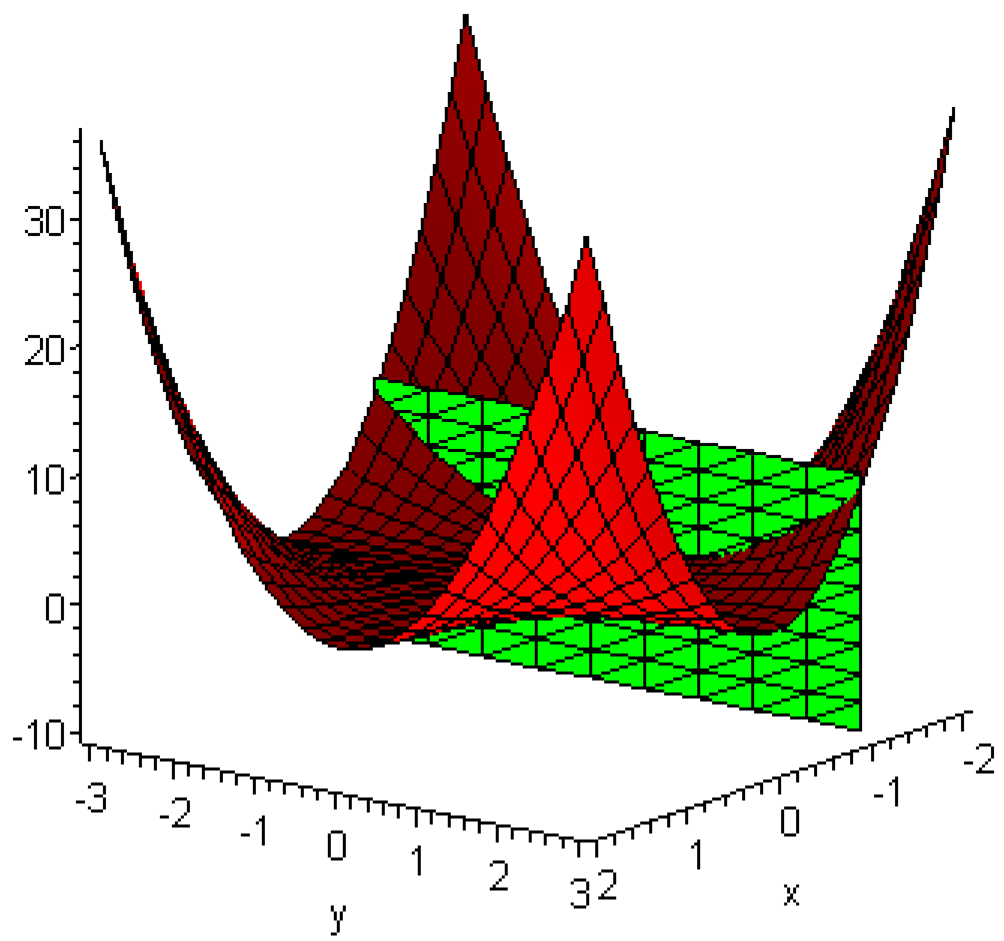
- **Geometriai jelentés**: érintők iránytangense
- Egy **z = f(x,y)** kétváltozós függvény parciális deriváltja egy adott (A, B) pontban -> az x,y változókhoz tartozó parciális függvények deriváltjai
- A függvénygrafikonból ez geometriailag úgy származtatható, hogy az *x = A,* illetve az *y = B* egyenletű síkokkal elmetsszük a függvény által meghatározott felületet, és a keletkezett görbéknek, mint egyváltozós függvényeknek meghatározzuk a deriváltjait a keresett pontban.
- Nézzük az ábrákat:

- *Geometriai jelentés*
- Adott $z = x*x*y*y$ függvény
- Az y szerinti első parciális deriváltat keressük a (-1,M) pontban
- Megoldás menete:
- meghatározzuk a függvény és az $x = -1$ sík metszetét
- Parciális derivált: a sík által „kivágott” görbe érintőjének meredeksége a (-1,y) pontokban, ennek az értékét számítjuk az y=M helyen.

z = x*x*y*y

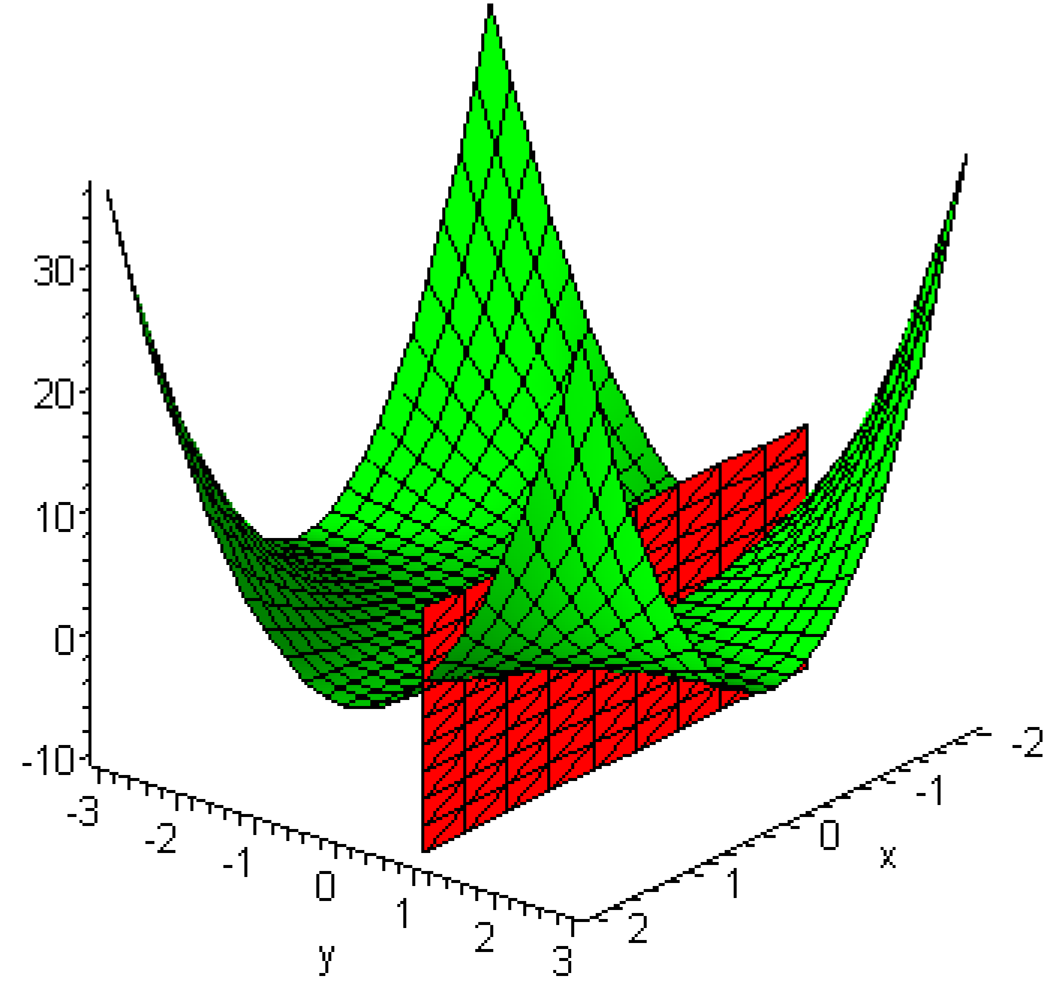
függvény és az *x* = -1 sík metszete

y szerinti parciális deriváltról van itt szó –> a sík által „kivágott” görbe érintőjének meredeksége a (-1,y) pontokban



A z = x*x*y*y függvény és az y = 1 sík metszete

x szerinti parciális deriváltról van itt szó –> a sík által „kivágott” görbe érintőjének meredeksége az (x,1) pontokban



Magasabb rendű deriváltak

- Maple programmal könnyen elvégezhető Diff() – függvény alkalmazásával

- A számolásban az elsőrendű parciális deriváltnál megismert technikát alkalmazzuk

Függvény gradiense – **grad(f)**

- *Ismétlés:*

  *GRADIENS: többváltozós függvény első-rendű teljes deriváltja egy pontban, ami egy vektort definiál. Ez a függvény **gradiense** az adott pontban.*

- Gradiens vektort Maple-el könnyen számolunk a Grad() paranccsal.

Így számoljuk a gradiensvektort

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}F(x,y),\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)\right]$$

Megjegyzések:

- Az F(x,y) függvény gradiens vektora mindig vizszintes.

- Az iránya és a hossza is változik x és y értékétől függően

Nézzünk egy egyszerű példát!

Tekintsük a paraboloid egyenletét: z=x*x+y*y

Számítsuk ki a gradiensvektorát!

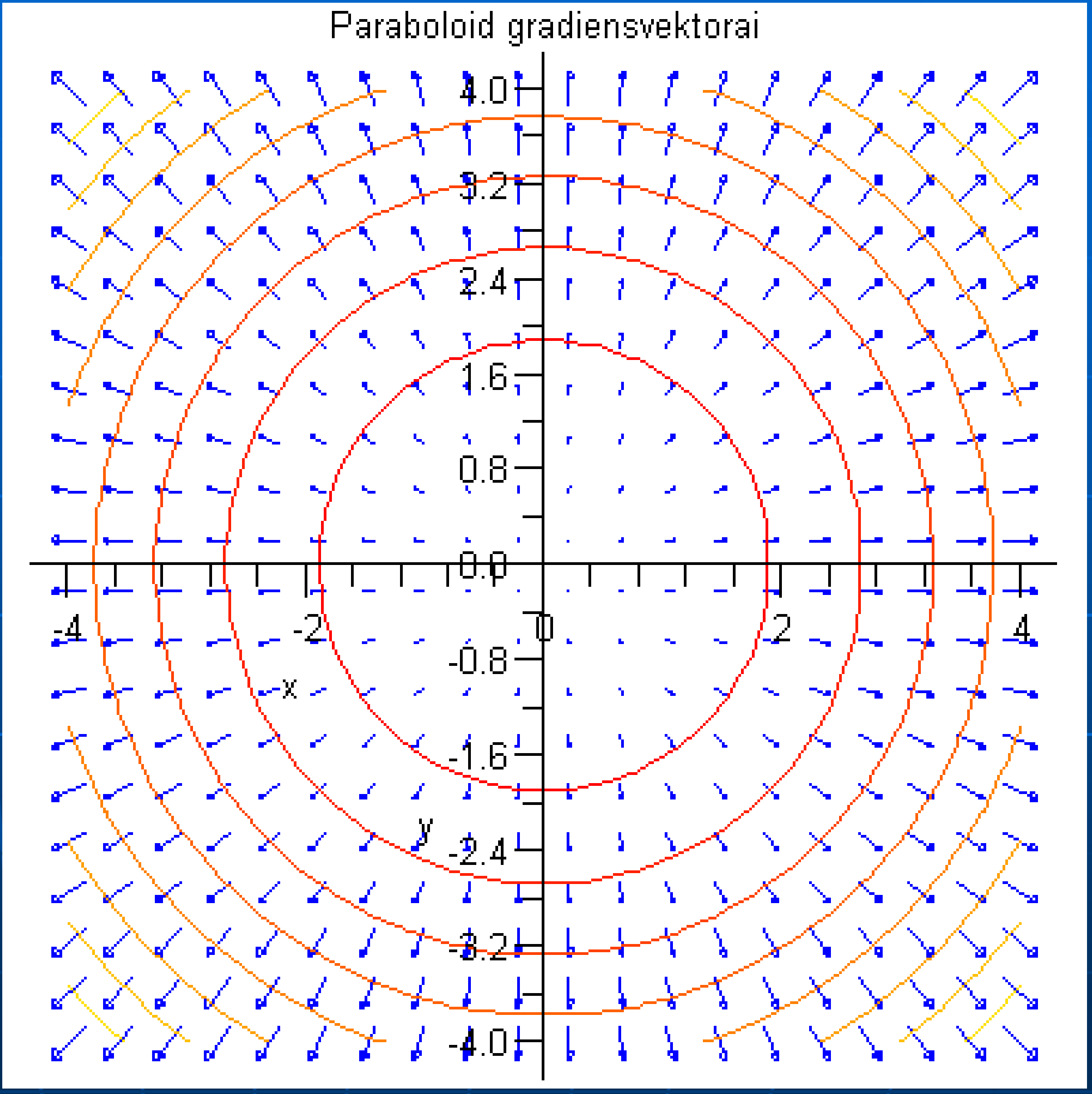
Egy egyszerű példa...

- **Számítsuk ki az f (x,y) = x^2 + y^2 függvény gradiensvektorát.**
- **> with(linalg):**
- **> f := (x,y) -> x^2 + y^2;**
- **> grad(f(x,y),vector([x,y]));**
- **Amit kapunk: [2x, 2y] (vagyis a függvény x-szerinti, y-szerinti parciális deriváltjai)**

Maple-ben:

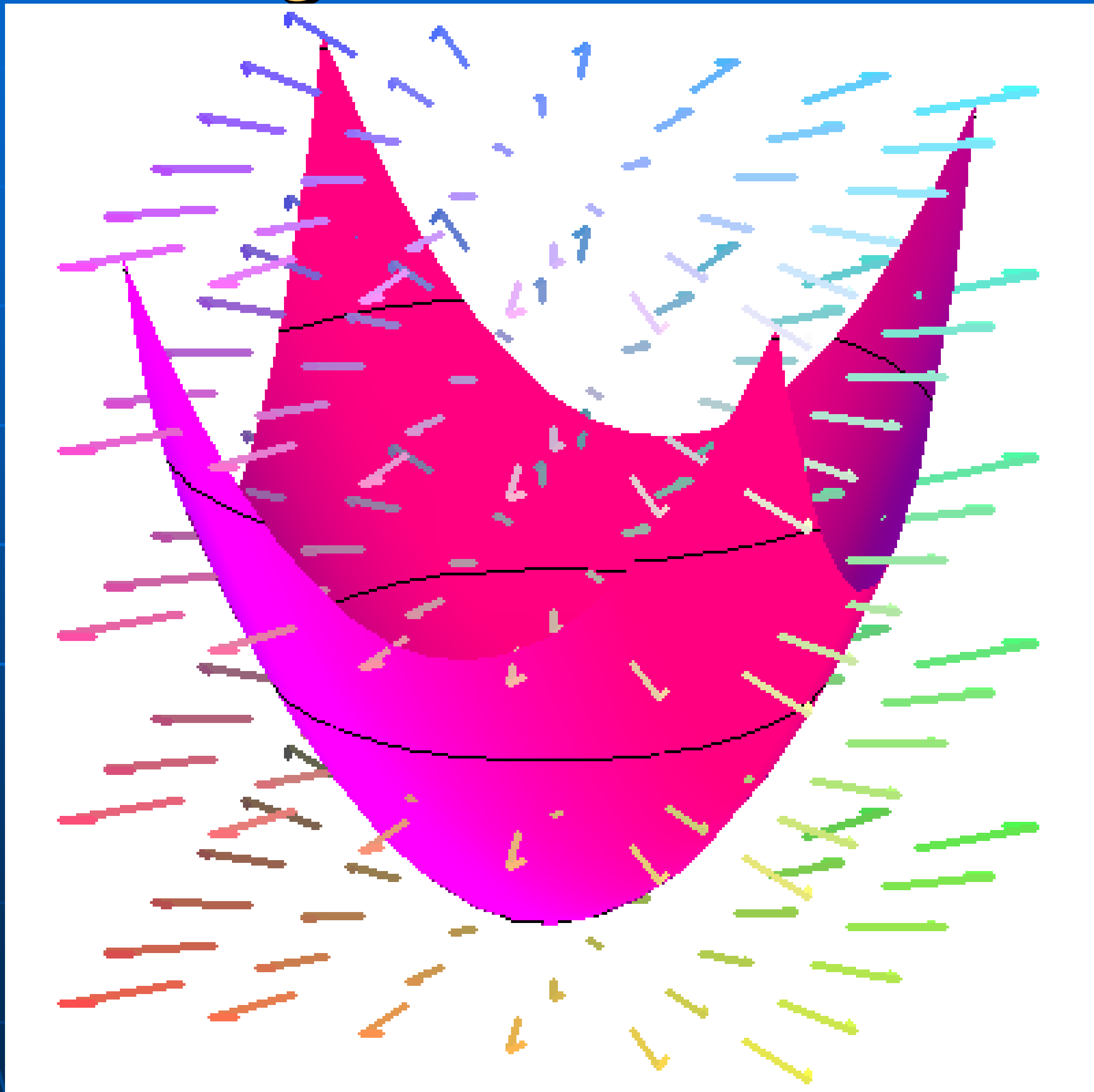
-**A paraboloid egy, az eddig bemutatottaktól eltérő ábrázolása:**

A z= állandó síkokkal számolt szintvonalaknak az xy síkra való vetületét látjuk -> térképkészítéshez hasonló szemléltetésmód



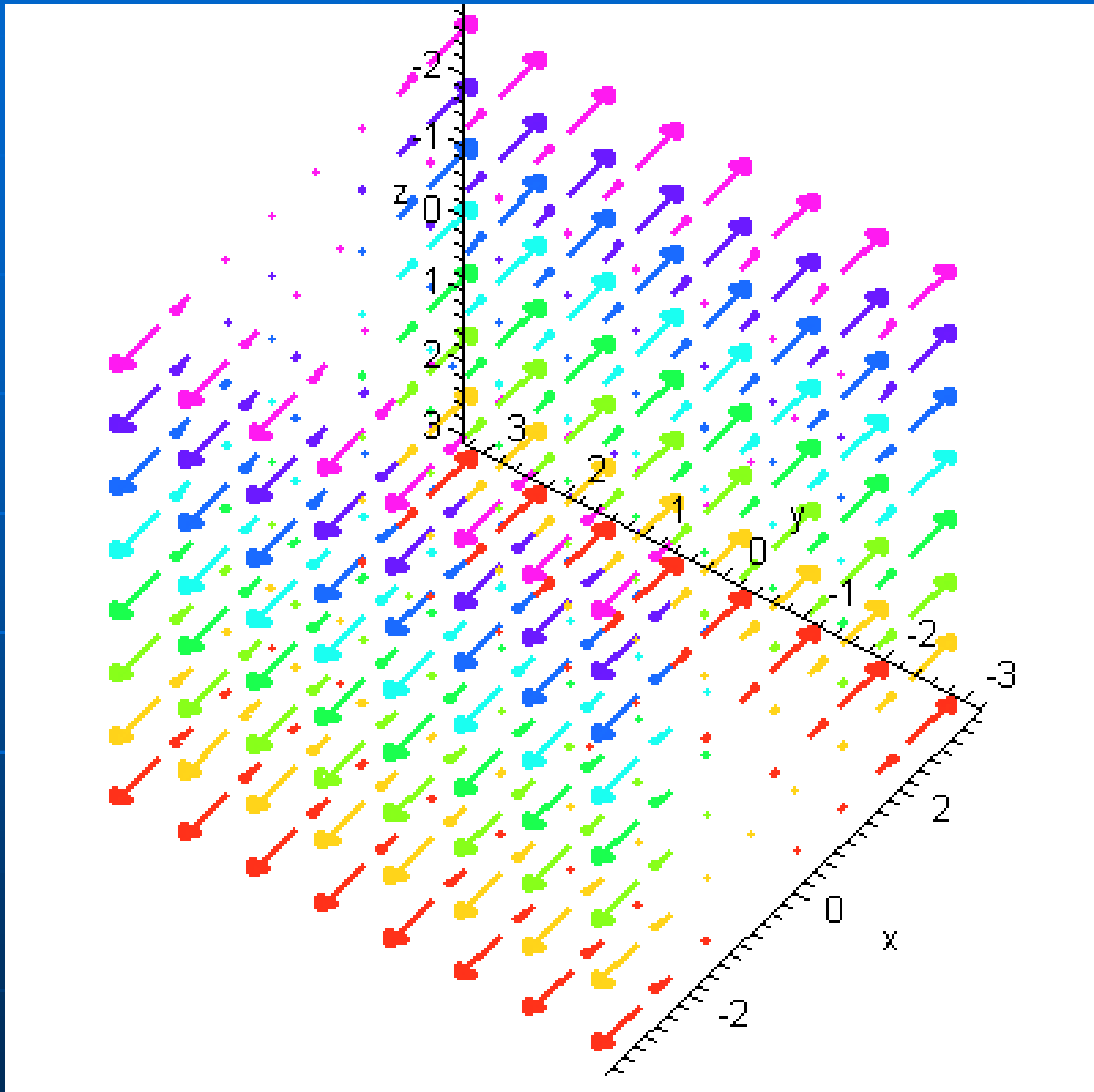
Paraboloid gradienstere

Mint látjuk, a gradiens-vektorok a szintvonalak normálisai



u=6*x^4-x*y*z

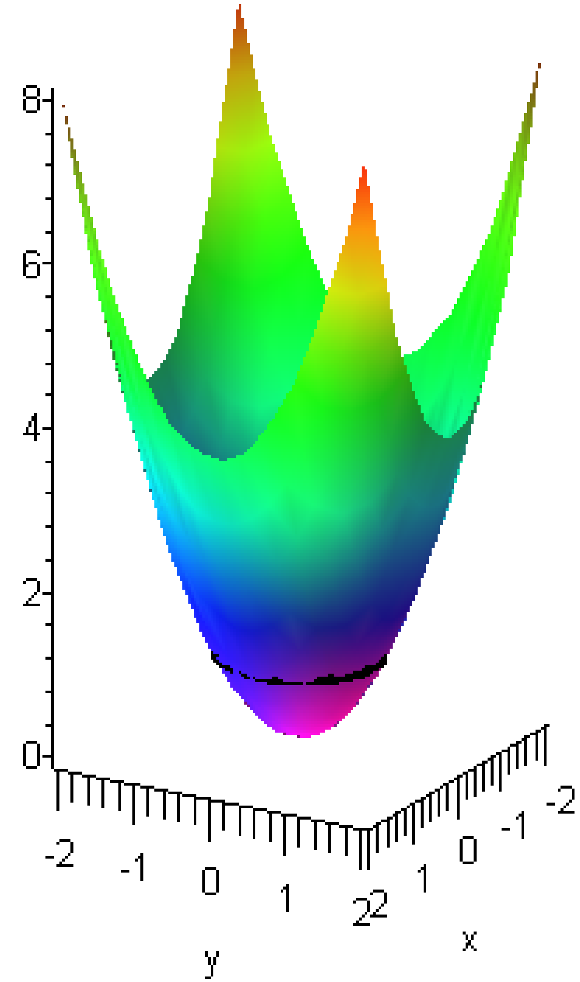
Az **x,y,z=-3..3** tartomány bizonyos pontjaiból kiindulva a Maple segítségével megrajzoltuk a pontokhoz tartozó gradiensvektort



Feladat

- Oldjuk meg:
  $z=x*x+y*y$,
  $z=1$

Megoldás:
szintvonal.



- Többváltozós függvényekről:

- Bolyai-könyvek :
- Fekete Zoltán-Zalay Miklós: Többváltozós függvények analízise
- Gáspár Csaba : Lineáris algebra és többváltozós függvények
- Kis Istvánné: Többváltozós függvények
- Császár Ákosné: Valós többváltozós függvények differenciálszámítása
- Császár Ákosné: Valós többváltozós függvények integrálszámítása