6. előadás: Számsorok 1.

Szabó Szilárd

Számsorok

Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (vagy $n \geq 1$) valós számok. Célunk: értelmet adni a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

végtelen összegnek, amit végtelen számsornak nevezünk. Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$$

a sor k-adik részletösszege. x_n neve: a sor (általános) tagja.

Definíció

A fenti végtelen sor konvergens vagy összegezhető, ha az $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ sorozat konvergens, és ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} s_k,$$

amit a sor összegének hívunk. divergens = nem konvergens.

Sorok konvergenciájának viselkedése összegre

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens sorok és $\alpha \in \mathbf{R}$. A konvergens sorozatok tulajdonságaiból azonnal következik:

Állítás

Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n)$ is konvergens és összege

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

Hasonlóan, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n$ is konvergens és összege

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Szükséges feltétel sorok konvergenciájára

Állítás

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *konvergens, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Bizonyítás

Mivel $x_n = s_n - s_{n-1}$, *így a konvergens sorozatok tulajdonságaiból*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0.$$

Megjegyzés

Az ellenkező irányú állítás nem igaz: léteznek olyan sorok, amelyek nem összegezhetők, bár $\lim_n x_n = 0$. *Példa ilyen sorra:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Mértani sorok

Definíció

Az $a \in \mathbf{R}$ hányadosú mértani sor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Állítás

Az a hányadosú mértani sor pontosan akkor konvergál, ha $|a| < 1$.

Bizonyítás

Ha $|a| \geq 1$, akkor a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül.
Ha $|a| < 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{k} a^n = \frac{a^k - 1}{a - 1} \to \frac{1}{1 - a} \quad (n \to \infty).$$

Harmonikus sor

A harmonikus sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Állítás

A harmonikus sor divergens.

Bizonyítás

Hasonlóan, mint a $\sqrt[n]{n}$ sorozat vizsgálatánál láthatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} &\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\
&= 1+\frac{k-1}{2}
\end{aligned}$$

ahol $k=\lfloor \log_2(n) \rfloor$, tehát (s_k) nem korlátos sorozat.

Abszolút konvergencia

Definíció

A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *sort* *abszolút konvergensnek* *mondjuk, ha a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

sor konvergens.

Állítás

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

Megjegyzés

Léteznek olyan sorok, amelyek konvergensek, de nem abszolút konvergensek. Példa ilyen sorra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Abszolút konvergencia $\Rightarrow$ konvergencia

Bizonyítás

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk ε-hoz olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbszámot, amelyre minden $K > k \geq N$ esetén

$$\sum_{n=k+1}^{K} |x_n| < \varepsilon.$$

Ekkor

$$|s_K - s_k| = \left| \sum_{n=k+1}^{K} x_n \right| \leq \sum_{n=k+1}^{K} |x_n| < \varepsilon,$$

tehát s_k Cauchy-sorozat.

Sorok átrendezése

Legyen

$$\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

egy bijekció.

Definíció

A

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

sor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor egy átrendezése.

Abszolút konvergens sorok átrendezhetősége

Tétel

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens, akkor bármely $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ átrendezése is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

Definíció

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens sor, de nem abszolút konvergens, azt mondjuk hogy feltételesen konvergens.

Tétel

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ egy feltételesen konvergens sor és $\alpha \in \mathbf{R}$ tetszőleges, akkor létezik egy olyan $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekció, amelyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha.$$

A majoráns- és minoráns-elv

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ nem-negatív tagú sorok:

$$0 \leq x_n, y_n.$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ majorálja a $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sort, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$x_n \geq y_n.$$

Tétel

Tegyük fel, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ majorálja $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$-et.

1. *Majoráns-elv: Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ összegezhető, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ is az.*
2. *Minoráns-elv: Megfordítva, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ divergens akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ is az.*

A majoráns- és minoráns-elv bizonyítása

Bizonyítás

Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n, \quad t_k = \sum_{n=0}^{k} y_n.$$

Ekkor (s_k) *és* (t_k) *monoton növekednek, és feltétel szerint*

$$0 \leq t_k \leq s_k.$$

Amennyiben (s_k) *konvergál* s*-hez, akkor tehát* s *felső korlátja a* (t_k) *sorozatnak, így utóbbi is konvergens.*

Megjegyzés

A tétel akkor is igaz, ha az $x_n \geq y_n$ *egyenlőtlenség csak véges sok kivételtől eltekintve teljesül: ekkor a fenti bizonyítás becslése helyett valamely* n*-től független alkalmas* $K > 0$ *esetén teljesül*

$$0 \leq t_k \leq K + s_k$$

A határérték-kritérium

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pozitív tagú sorok.

Tétel

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \neq 0$$

létezik és 0-tól különbözik. Ekkor, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergens.

Bizonyítás

Legyen a határérték $c > 0$, és válasszunk $\frac{c}{2}$-höz $N \in \mathbf{N}$ küszöbszámot: minden $n > N$ esetén

$$c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} < \frac{x_n}{y_n} < c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2}.$$

Ezt átrendezve:

$$\frac{c}{2} y_n < x_n < \frac{3c}{2} y_n.$$

A majoráns-elvből nyerjük az állítást.

A gyök-kritérium

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor.

Tétel

Ha létezik olyan $r < 1$ érték, amelyre véges sok kivételtől eltekintve teljesül

$$\sqrt[n]{x_n} \leq r,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor összegezhető.

Megjegyzés

Nem elég a konvergenciához, ha $r = 1$-re teljesül a feltétel. Például, a harmonikus sorra

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1,$$

e sor mégis divergens.

A gyök-kritérium bizonyítása

Bizonyítás

A feltétel alapján véges sok n értéktől eltekintve

$$x_n \leq r^n.$$

Alkalmazzuk a majoráns-elvet a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *és a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

mértani sorra, figyelembe véve hogy utóbbi konvergens, mert $r < 1$.

A hányados-kritérium

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor.

Tétel

Ha létezik olyan $r < 1$ érték, amelyre véges sok kivételtől eltekintve teljesül

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq r,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor összegezhető.

Megjegyzés

Itt sem elég feltenni, hogy

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1;$$

ellenpélda ismét a harmonikus sor.

A hányados-kritérium bizonyítása

Bizonyítás

Teljes indukcióval láthatjuk, hogy valamely N esetén minden $n = N + k > N$-re

$$x_{N+k} \leq r x_{N+k-1} \leq \cdots \leq r^k x_N,$$

így alkalmazhatjuk a majoráns-elvet a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *és a*

$$x_N \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

sorokra, ahol utóbbi konvergens, mert $r < 1$.

Az exponenciális sor konvergenciája

Legyen $a \in \mathbf{R}$ tetszőleges, és tekintsük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

sort. Ekkor Elképesztő reklámmal mentek rá Márki-Zay Péter támogatóira Hódmezővásárhelyen.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0.$$

Legyen $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ekkor tehát létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy minden $n > N$ esetén

$$\left| \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} \right| < \frac{1}{2},$$

tehát a hányados-kritérium feltételei teljesülnek $r = \frac{1}{2}$-re. Emiatt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ összegezhető.

Az exponenciális sor összege

Tétel

Minden $a \in \mathbf{R}$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a.$$

Bizonyítás

Az egyszerűség kedvéért legyen $a = 1$. Legyen

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}, \quad e_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

Az exponenciális sor összege, bizonyítás

Bizonyítás (folyt.)

Ekkor, a binomiális tétel miatt:

$$e_k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \frac{1}{k^l} = \sum_{l=0}^{k} \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!} \frac{1}{k^l}$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} 1 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{2}{k}\right) \cdots \left(1 - \frac{l-1}{k}\right) \leq s_k,$$

tehát

$$\lim_{k\to\infty} e_k \leq \lim_{k\to\infty} s_k.$$

Az exponenciális sor összege, bizonyítás

Bizonyítás (folyt.)

Másrészt, ha $K \geq k$ akkor

$$e_K \geq \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} 1 \left(1 - \frac{1}{K}\right)\left(1 - \frac{2}{K}\right) \cdots \left(1 - \frac{l-1}{K}\right),$$

Tartson most $K \to \infty$, miközben k állandó. Ekkor azt kapjuk, hogy minden k-ra

$$\lim_{K \to \infty} e_K \geq \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} = s_k,$$

tehát

$$\lim_{K \to \infty} e_K \geq \lim_{k \to \infty} s_k.$$

A természetes logaritmus alapja irracionális

Tétel

Nem léteznek olyan p, q egész számok ($q \neq 0$), amelyekre

$$e = \frac{p}{q}.$$

Bizonyítás

Vegyük észre, hogy

$$0 < e - s_q = \sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{1}{l!} = \frac{1}{q!} \sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)\cdots l} <$$

$$< \frac{1}{(q+1)!} \sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{l-q-1}} = \frac{1}{(q+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} =$$

$$= \frac{1}{(q+1)!} \frac{q+1}{q} = \frac{1}{q!q}$$

A természetes logaritmus alapja irracionális, folyt.

Bizonyítás (folyt.)

Feltéve, hogy $e = p/q$ *és beszorozva mindkét oldalt* $q!$*-sal kapjuk, hogy*

$$p(q-1)! - \sum_{l=0}^{q} \frac{q!}{l!} < \frac{1}{q},$$

ami ellentmondás, mert a bal oldalon pozitív egész szám áll.

Leibniz-tipusú sorok

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_n$ *sor* ***Leibniz-tipusú****, ha minden* n *esetén*

$$0 < x_{n+1} < x_n,$$

valamint $x_n \to 0$ *ahogy* $n \to \infty$.

Tétel

Minden Leibniz-tipusú sor konvergens (de nem feltétlenül abszolút konvergens).

Bizonyítás

Legyen s_k *a sor* k*-adik részletösszege. Ekkor* $K > k$ *esetén teljes indukcióval látható, hogy*

$$|s_K - s_k| = |x_K - x_{K-1} + x_{K-2} - \cdots + (-1)^{K-k-1} x_{k+1}| < x_{k+1}.$$

Ezért, (s_k) *Cauchy-sorozat, tehát konvergens.*

Sorok Cauchy-szorzata

Legyenek $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ számsorok.

Definíció

E két sor Cauchy-szorzata az a $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ sor, amelynek általános tagja

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}.$$

Tétel

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ abszolút konvergensek, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

Példa: két exponenciális sor Cauchy-szorzata

Legyenek $a, b \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek, és határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$$

sorok Cauchy-szorzatát: ennek általános tagja

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!}$$

ahol felhasználtuk binomiális tételt. A fenti tételből:

$$e^a e^b = e^{a+b}.$$

p-sorok

Definíció

Adott $p \in \mathbf{R}$ esetén a p-sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Tétel

A p-sor akkor és csak akkor összegezhető, ha $p > 1$.

Bizonyítás

Ha $p = 1$, akkor a p-sor a harmonikus sor, amelyről már láttuk hogy divergens. Ha $p < 1$, akkor

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n},$$

ezért a minoráns-elv miatt a p-sor divergens.

p-sorok (folyt.)

Állítás

Egy monoton csökkenő, pozitív általános tagú $\sum_n a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha a

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

sor az.

Bizonyítás

Legyen

$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

A harmonikus sornál használt módszerrel látható:

$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k} 2^l a_{2^l} \leq \sum_{m=1}^{n} a_m \leq \sum_{l=1}^{k} 2^l a_{2^l}.$$

Használjuk a majoráns-elvet.

p-sorok (folyt.)

Alkalmazzuk a fenti állítást $p > 1$ esetén a p-sorra:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{(1-p)}\right)^k,$$

utóbbi pedig egy konvergens mértani sor, mert

$$2^{(1-p)} < 1.$$