7. előadás: Valós függvények, határérték, folytonosság

Szabó Szilárd

Valós függvények

Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$ egy részhalmaz. Egy

$$f : D \to \mathbf{R}$$

függvényt valós függvénynek nevezünk.
Egy f valós függvény gráfja az

$$\{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2\}$$

ponthalmaz. Mértanilag, f gráfja egy görbe, amelyen minden $x \in D$ abszcisszához pontosan egy ordináta tartozik. Többek közt, nem minden síkbeli görbe gráfja valamely valós függvénynek.

Részhalmaz őősképe

Legyen f egy valós függvény és $H \subseteq \mathbf{R}$. Ekkor H ősképe f-re vonatkozóan:

$$f^{-1}(H) = \{x \in D : \quad f(x) \in H\}.$$

Speciálisan, ha $H = \{y\}$, akkor használjuk H ősképére a

$$f^{-1}(y)$$

jelölést.

Függvény-transzformációk 1.

Adott f valós függvény és $a, b \in \mathbf{R}$ esetén tekinthetjük a

$$x \mapsto f(x+a)+b$$

függvényt. Ennek gráfja f gráfjából a következőképpen keletkezik: eltoljuk az x-tengely mentén a értékkel balra, majd eltoljuk az y-tengely mentén b értékkel felfelé. (Amennyiben a illetve b negatívak, ezeket az eltolásokat $|a|$ illetve $|b|$ értékkel a fent leírttal ellentétes irányban végezzük.)

Függvény-transzformációk 2.

Hasonlóan: ha $c, d > 0$, akkor

$$x \mapsto df(cx)$$

gráfja f gráfjából úgy kapható, hogy az x-tengellyel párhuzamosan c-edrészére zsugorítjuk, az y-tengellyel párhuzamosan d-szeresére nagyítjuk. Amennyiben c illetve d kisebbek 1-nél, akkor a megfelelő zsugorításból nagyítás lesz, és viszont.
Amennyiben c (illetve d) negatív, akkor egy $|c|$-kel való zsugorítás (illetve, $|d|$-kel való nagyítás) után egy y-tengelyre (illetve x-tengelyre) való tükrözést is el kell végezni.

Korlátosság

Egy $f : D \to \mathbf{R}$ valós függvény

- felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbf{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq K$;
- alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbf{R}$ amelyre minden $x \in D$ esetén $f(x) \geq k$;
- korlátos, ha mind alulról, mind felülről korlátos.

Monotonitás

Legyen $[a, b] \subseteq D$ és $f : D \to \mathbf{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az $[a, b]$ intervallumon f

- monoton növekvő, ha minden $a \leq x < y \leq b$ esetén teljesül $f(x) \leq f(y)$;
- szigorúan monoton növekvő, ha minden $a \leq x < y \leq b$ esetén teljesül $f(x) < f(y)$;
- monoton csökkenő, ha minden $a \leq x < y \leq b$ esetén teljesül $f(x) \geq f(y)$;
- szigorúan monoton csökkenő, ha minden $a \leq x < y \leq b$ esetén teljesül $f(x) > f(y)$;
- monoton ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő;
- szigorúan monoton ha szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő.

Lokális szélsőértékek

Legyen $f : D \to \mathbf{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont f-nek

- lokális (helyi) minimuma, ha létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre minden $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \cap D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$;
- lokális (helyi) maximuma, ha létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre minden $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \cap D$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- lokális (helyi) szélsőértéke, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma.

Globális szélsőértékek

Legyen $f : D \to \mathbf{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont f-nek

- globális minimuma, ha minden $x \in D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$;
- globális maximuma, ha minden $x \in D$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- globális szélsőértéke, ha globális minimuma vagy globális maximuma.

Periodicitás, paritás

Legyen $f : D \to \mathbf{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy f

- periodikus $T > 0$ periódussal, ha minden $x \in D$ esetén $x + T \in D$ és $f(x + T) = f(x)$;
- páros, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = f(x)$;
- páratlan, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = -f(x)$.

Műveletek valós függvényekkel

Legyenek

$$f_1 : D_1 \to \mathbf{R}, \quad f_2 : D_2 \to \mathbf{R}$$

valós függvények. Ekkor f_1 és f_2 összege:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : D_1 \cap D_2 &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto f_1(x) + f_2(x), \end{aligned}$$

szorzata:

$$\begin{aligned} f_1 f_2 : D_1 \cap D_2 &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto f_1(x) f_2(x), \end{aligned}$$

és hányadosa

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_2} : D_1 \cap (D_2 \setminus f_2^{-1}(0)) &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)}. \end{aligned}$$

Összetett függvények és inverz függvény

Legyenek

$$f : D_f \to \mathbf{R}, \quad g : D_g \to \mathbf{R}$$

valós függvények. Ekkor f és g összetett (komponált) függvénye:

$$g \circ f : D_f \cap f^{-1}(D_g) \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto g(f(x)).$$

Ha f bijektív, akkor f inverz függvénye:

$$f^{-1} : R_f \to D_f \subseteq \mathbf{R}$$

az egyetlen olyan függvény, amelyre minden $x \in D_f$ esetén

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Ekkor f és f^{-1} gráfja egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan.

Függvény pontbeli határértéke (Heine-féle definíció)

Legyen $f : D \to \mathbf{R}$ egy valós függvény és $x_0 \in \mathbf{R}$ olyan, hogy létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre

$$(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \setminus \{x_0\} \subseteq D.$$

Azt mondjuk, hogy f határértéke x_0-ban

- valamely A érték, amennyiben valahányszor egy $(x_1, x_2, \dots)$ sorozat $D_f \setminus \{x_0\}$-ban x_0-hoz tart, mindannyiszor a $(f(x_1), f(x_2), \dots)$ sorozat tart A-hoz;
- $+\infty$, amennyiben valahányszor egy $(x_1, x_2, \dots)$ sorozat $D_f \setminus \{x_0\}$-ban x_0-hoz tart, mindannyiszor a $(f(x_1), f(x_2), \dots)$ sorozat tart $+\infty$-hez;
- $-\infty$, amennyiben valahányszor egy $(x_1, x_2, \dots)$ sorozat $D_f \setminus \{x_0\}$-ban x_0-hoz tart, mindannyiszor a $(f(x_1), f(x_2), \dots)$ sorozat tart $-\infty$-hez.

Jelölés

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Függvény féloldali határértéke (Heine-féle definíció)

Legyen $f : D \to \mathbf{R}$ egy valós függvény és $x_0 \in \mathbf{R}$ olyan, hogy létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre

$$(x_0 - \alpha, x_0) \subseteq D.$$

Azt mondjuk, hogy f baloldali határértéke x_0-ban

- valamely A érték, amennyiben valahányszor egy $(x_1, x_2, \ldots)$ sorozat $(x_0 - \alpha, x_0)$-ban x_0-hoz tart, mindannyiszor a $(f(x_1), f(x_2), \ldots)$ sorozat tart A-hoz;
- $+\infty$, amennyiben valahányszor egy $(x_1, x_2, \ldots)$ sorozat $(x_0 - \alpha, x_0)$-ban x_0-hoz tart, mindannyiszor a $(f(x_1), f(x_2), \ldots)$ sorozat tart $+\infty$-hez;
- $-\infty$, amennyiben valahányszor egy $(x_1, x_2, \ldots)$ sorozat $(x_0 - \alpha, x_0)$-ban x_0-hoz tart, mindannyiszor a $(f(x_1), f(x_2), \ldots)$ sorozat tart $-\infty$-hez.

Hasonlóan értelmezhető f jobboldali határértéke x_0-ban.

Függvény féloldali határértéke, folyt.

Jelölés

Baloldali határérték:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x);$$

jobboldali határérték:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Tétel

Egy f függvény x_0-beli határértéke akkor és csak akkor létezik, ha f-nek mindkét féloldali határértéke létezik x_0-ban, és értékük azonos:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Függvény végtelenbeli határértéke (Heine-féle definíció)

Legyen $f : D \to \mathbf{R}$ egy valós függvény és tegyük fel, hogy létezik olyan $K \in \mathbf{R}$ amelyre

$$(K, +\infty) \subseteq D.$$

Azt mondjuk, hogy f határértéke $+\infty$-ben

- valamely A érték, amennyiben valahányszor egy $(x_1, x_2, \ldots)$ sorozat $+\infty$-hez tart, mindannyiszor a $(f(x_1), f(x_2), \ldots)$ sorozat tart A-hoz;
- $+\infty$, amennyiben valahányszor egy $(x_1, x_2, \ldots)$ sorozat $+\infty$-hez tart, mindannyiszor a $(f(x_1), f(x_2), \ldots)$ sorozat tart $+\infty$-hez;
- $-\infty$, amennyiben valahányszor egy $(x_1, x_2, \ldots)$ sorozat $+\infty$-hez tart, mindannyiszor a $(f(x_1), f(x_2), \ldots)$ sorozat tart $-\infty$-hez.

Jelölés

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Függvény végtelenbeli határértéke (Heine-féle definíció)

Legyen $f : D \to \mathbf{R}$ egy valós függvény és tegyük fel, hogy létezik olyan $k \in \mathbf{R}$ amelyre

$$(-\infty, k) \subseteq D.$$

Azt mondjuk, hogy f határértéke $-\infty$-ben

- valamely A érték, amennyiben valahányszor egy $(x_1, x_2, \ldots)$ sorozat $-\infty$-hez tart, mindannyiszor a $(f(x_1), f(x_2), \ldots)$ sorozat tart A-hoz;
- $+\infty$, amennyiben valahányszor egy $(x_1, x_2, \ldots)$ sorozat $-\infty$-hez tart, mindannyiszor a $(f(x_1), f(x_2), \ldots)$ sorozat tart $+\infty$-hez;
- $-\infty$, amennyiben valahányszor egy $(x_1, x_2, \ldots)$ sorozat $-\infty$-hez tart, mindannyiszor a $(f(x_1), f(x_2), \ldots)$ sorozat tart $-\infty$-hez.

Jelölés

$$\lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Függvény pontbeli határértéke (Cauchy-féle definíció)

Legyen $f : D \to \mathbf{R}$ egy valós függvény és $x_0 \in \mathbf{R}$ olyan, hogy létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre

$$(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \setminus \{x_0\} \subseteq D.$$

Azt mondjuk, hogy f határértéke x_0-ban

- valamely A érték, amennyiben minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $0 < |x - x_0| < \delta$, mindannyiszor $|f(x) - A| < \varepsilon$;
- $+\infty$, amennyiben minden $K \in \mathbf{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $0 < |x - x_0| < \delta$, mindannyiszor $f(x) > K$;
- $-\infty$, amennyiben minden $k \in \mathbf{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $0 < |x - x_0| < \delta$, mindannyiszor $f(x) < k$.

Függvény féloldali határértéke (Cauchy-féle definíció)

Legyen $f : D \to \mathbf{R}$ egy valós függvény és $x_0 \in \mathbf{R}$ olyan, hogy létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre

$$(x_0 - \alpha, x_0) \subseteq D.$$

Azt mondjuk, hogy f baloldali határértéke x_0-ban

- valamely A érték, amennyiben minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, mindannyiszor $|f(x) - A| < \varepsilon$;
- $+\infty$, amennyiben minden $K \in \mathbf{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, mindannyiszor $f(x) > K$;
- $-\infty$, amennyiben minden $k \in \mathbf{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, mindannyiszor $f(x) < k$.

Függvény végtelenbeli határértéke (Cauchy-féle definíció)

Legyen $f : D \to \mathbf{R}$ egy valós függvény és tegyük fel, hogy létezik olyan $K \in \mathbf{R}$ amelyre

$$(K, +\infty) \subseteq D.$$

Azt mondjuk, hogy f határértéke $+\infty$-ben

- valamely A érték, amennyiben minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $M \in \mathbf{R}$, hogy valahányszor $x > M$, mindannyiszor $|f(x) - A| < \varepsilon$;
- $+\infty$, amennyiben minden $R \in \mathbf{R}$ esetén létezik olyan $M \in \mathbf{R}$, hogy valahányszor $x > M$, mindannyiszor $f(x) > R$;
- $-\infty$, amennyiben minden $r \in \mathbf{R}$ esetén létezik olyan $M \in \mathbf{R}$, hogy valahányszor $x > M$, mindannyiszor $f(x) < r$.

Véges határérték viselkedése műveletekre

Tétel

Ha f és g valós függvények, amelyeknek létezik véges határértéke valamely x_0 pontban, akkor az $f+g, fg$ függvényeknek is létezik határértéke x_0-ban, és

$$\lim_{x\to x_0}(f+g) = \lim_{x\to x_0} f + \lim_{x\to x_0} g$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg) = \left(\lim_{x\to x_0} f\right)\left(\lim_{x\to x_0} g\right).$$

Ha továbbá létezik olyan $\alpha > 0$ amelyre minden $0 < |x - x_0| < \alpha$ esetén $g(x) \neq 0$, valamint $\lim_{x\to x_0} g \neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x\to x_0} f}{\lim_{x\to x_0} g}.$$

Hasonló állítások igazak féloldali és végtelenbeli határértékre.

Végtelen határérték viselkedése műveletekre

Tétel

Ha f és g valós függvények, $\lim_{x \to x_0} f = \pm\infty$, $\lim_{x \to x_0} g > 0$, akkor

$$\lim_{x \to x_0} (f + g) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} (fg) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \pm\infty.$$

Folytonos függvények

Legyen $f : (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \to \mathbf{R}$ valós függvény.

Definíció

Azt mondjuk, hogy f folytonos az x_0 pontban, ha f-nek létezik határértéke x_0-ban, és

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f.$$

Azt mondjuk, hogy $f : D \to \mathbf{R}$ folytonos, ha minden $x_0 \in D$ pontban folytonos. Azt mondjuk, hogy f balról (illetve, jobbról) félig folytonos az x_0 pontban, ha f-nek létezik baloldali (illetve, jobboldali) határértéke x_0-ban, és

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f$$

(illetve,

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f).$$

Összeg-, szorzat- és hányadosfüggvény folytonossága

A határtértékre látott eredményekből rögtön következik:

Tétel

Ha az f és g valós függvények folytonosak x_0-ban, akkor ugyanez igaz az $f+g$ és fg függvényekre, valamint amennyiben $g(x_0)\neq 0$ akkor az $\frac{f}{g}$ függvényre is.

Összetett függvény folytonossága

Legyenek

$$f : D_f \to \mathbf{R}, \quad g : D_g \to \mathbf{R}$$

valós függvények. Tegyük fel, hogy $g \circ f$ értelmezési tartománya tartalmaz valamely intervallumot x_0 körül.

Tétel

Amennyiben f folytonos az x_0 pontban és g folytonos az $f(x_0)$ pontban, akkor $g \circ f$ is folytonos x_0-ban.

Weierstrass szélsőérték-tétele

Tétel

Ha $a < b \in \mathbf{R}$ *és* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *folytonos valós függvény, akkor léteznek olyan* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *értékek, amelyekben* f*-nek globális maximuma illetve minimuma van az* $[a, b]$ *intervallumon: minden* $x \in [a, b]$ *esetén*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Többek között, f *korlátos* $[a, b]$*-n.*

Bolzano közbensőérték-tétele

Tétel

Ha $a < b \in \mathbf{R}$ *és* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *folytonos valós függvény, valamint* γ *tetszőleges érték* $f(a)$ *és* $f(b)$ *között, akkor létezik olyan* $c \in [a, b]$ *amelyre* $f(c) = \gamma$*.*

Következésképpen: ha $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ folytonos és szigorúan monoton növekvő (illetve, szigorúan monoton csökkenő), akkor $R_f = [f(a), f(b)]$ (illetve, $R_f = [f(b), f(a)]$). Többek között, f-nek létezik

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$$

(illetve,

$$f^{-1} : [f(b), f(a)] \to [a, b])$$

inverz-függvénye.