8. előadás: Nevezetes függvények

Szabó Szilárd

Polinom-függvények

Ha $n \in \mathbf{N}$ és

$$a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R},$$

ahol $a_0 \neq 0$, akkor n-edfokú polinom-függvénynek hívjuk a

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

függvényt. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $a_0 > 0$. Ekkor

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

valamint ha n páros akkor

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

míg ha n páratlan akkor

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Polinom-függvények folytonossága

Állítás

*Minden polinom-függvény egész **R**-en folytonos.*

Bizonyítás

A linearitás miatt elég belátni $f(x) = x^n$-re, ahol $n \geq 1$ egész szám. (Az $n = 0$ eset nyilvánvaló.)
Legyen x_0 tetszőleges, és rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ értéket. Legyen $K = \max(1, 2|x_0|)$, és

$$\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{nK^{n-1}}, \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Ekkor, minden $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned} |x^n - x_0^n| &= |x - x_0| \left|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}\right| \\ &\leq \delta \cdot nK^{n-1} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Páratlan fokú polinom-függvények valós gyökének létezése

Tétel

Ha f páratlan fokú valós polinom, akkor létezik valós gyöke.

Bizonyítás

Láttuk: kellően nagy $R > 0$ esetén

$$f(-R) < 0 < f(R).$$

Alkalmazzuk most Bolzano közbensőérték-tételét: f-nek van gyöke a $(-R, R)$ intervallumon.

Racionális tört-függvények

Legyenek f, g polinom-függvények:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$g(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_k.$$

Feltesszük, hogy $b_0 \neq 0$, többek között g nem azonosan 0. Ekkor az

$$\frac{f}{g}$$

hányadosukat racionális tört-függvénynek nevezzük.
A folytonos függvények hányadosára vonatkozó tétel miatt ekkor f/g folytonos minden olyan $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban, ahol $g(x_0) \neq 0$.

Racionális tört-függvények határértéke

Tétel

Legyen $\frac{f}{g}$ racionális tört-függvény, mint az előző oldalon.

- *Ha $n < k$ akkor*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = 0.$$

- *Ha $n = k$ akkor*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = \frac{a_0}{b_0}.$$

- *Ha $n > k$ akkor*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = sgn\left(\frac{a_0}{b_0}\right)\infty$$

és

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f}{g} = sgn\left((-1)^{n-k}\frac{a_0}{b_0}\right)\infty$$

Lineáris tört-függvények

Amennyiben $n = 1 = k$ azaz, a

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

alakú függvényeket lineáris tört-függvénynek nevezzük. Tekintsük az

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

egyenletet. Elemi algebrai átalakítások után ennek ekvivalens alakja:

$$\left(x + \frac{d}{c}\right)\left(y - \frac{a}{c}\right) = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

Lineáris tört-függvények gráfja

Előbbi egyenletű görbe a függvény-transzformációk alatt látottak értelmében az

$$xy = 1$$

hiperbolából a

$$\frac{bc - ad}{c^2}$$

tényezővel való y-tengely irányú nyújtással, majd a

$$\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

vektorral való eltolással adódik.

Hatvány-függvények

Valamely rögzített $\alpha \in \mathbf{R}$ és változó $x \in \mathbf{R}_+$ esetén a

$$x \mapsto x^\alpha$$

függvényt hatvány-függvénynek nevezzük. Hasonlóan a polinomok esetéhez, megmutatható hogy minden hatvány-függvény folytonos $\mathbf{R}_+$-on.

Állítás

- *Ha $\alpha > 0$ akkor a hatvány-függvény szigorúan monoton növekvő.*
- *Ha $\alpha = 0$ akkor a hatvány-függvény állandó.*
- *Ha $\alpha < 0$ akkor a hatvány-függvény szigorúan monoton csökkenő.*

Többek között, ha $\alpha \neq 0$ akkor a hatvány-függvény értékkészlete $\mathbf{R}_+$.

Exponenciális függvények

Rögzítsünk valamely $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ értéket. Ekkor a

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\to \mathbf{R}_+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

függvényt *a* alapú exponenciális függvénynek hívjuk.

Állítás

Minden a esetén $a^0 = 1$.

- *Ha* $a > 1$ *akkor az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, és*

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

- *Ha* $a < 1$ *akkor az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő, és*

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

Exponenciális függvények folytonossága

Állítás

Az a alapú exponenciális függvény folytonos. Többek között, értékkészlete $\mathbf{R}_+$.

Bizonyítás

Rögzítsünk tetszőlegesen egy $\varepsilon > 0$ *számot; keresünk olyan* $\delta > 0$ *értéket, hogy minden* $|x - x_0| < \delta$ *esetén teljesüljön*

$$a^{x_0}|a^{x-x_0} - 1| = |a^x - a^{x_0}| < \varepsilon.$$

Ez ekvivalens az

$$a^{|x-x_0|} < \min\left(1 + \varepsilon a^{-x_0}, \frac{1}{1 - \varepsilon a^{-x_0}}\right)$$

egyenlőtlenséggel. Ha most $x - x_0 = \frac{1}{n}$, *akkor a bal oldalon álló kifejezés* $\sqrt[n]{a}$, *amiről tudjuk hogy* 1*-hez tart, a jobb oldalon álló kifejezés pedig* 1*-nél nagyobb, tehát elég nagy* n *esetén teljesül a fenti egyenlőtlenség. Az általános eset erre visszavezethető.*

Logaritmus-függvények

Rögzítsünk ismét valamely $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ értéket. A fent látottak miatt ekkor az

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\to \mathbf{R}_+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

exponenciális függvény bijektív, így létezik inverz-függvénye. Az *a alapú logaritmus-függvény* az egyetlen olyan

$$\log_a : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$$

függvény, amelyre minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

Logaritmus-függvények tulajdonságai

Jelölés

$$\log_e(x) = \ln(x).$$

Állítás

Minden a esetén $\log_a(1) = 0$ és $\log_a$ folytonos $\mathbf{R}_+$-on.

- *Ha $a > 1$ akkor az a alapú logaritmus-függvény szigorúan monoton növekvő, és*

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = +\infty.$$

- *Ha $a < 1$ akkor az a alapú logaritmus-függvény szigorúan monoton csökkenő, és*

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = -\infty.$$

Szögfüggvények

Legyen $x \in \mathbf{R}$, ahol x-re úgy gondolunk, mint egy szög radiánban mért mértékére. Ekkor a

$$\sin(x), \quad \cos(x), \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

függvényeket elemi szögfüggvényeknek nevezzük.

Állítás

- *A* $\sin(x), \cos(x)$ *függvények* 2π *szerint periodikusak.*
- $\sin$ *páratlan,* $\cos$ *páros.*
- *A* $\tan(x)$ *és* $\cot(x)$ *függvények* π *szerint periodikusak, és értelmezési tartományuk rendre*

$$\mathbf{R} \setminus (\mathbf{Z}\pi + \frac{\pi}{2}), \quad \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi.$$

- $\tan$ *és* $\cot$ *páratlanok.*

Szögfüggvények monotonitása és folytonossága

Állítás

- *A* $\sin, \cos, \tan, \cot$ *függvények értelmezési tartományukon folytonosak.*
- $\sin$ *szigorúan monoton növekvő a* $[-\pi/2, \pi/2]$ *intervallumon,* $[-1, 1]$ *értékkészlettel.*
- $\cos$ *szigorúan monoton csökkenő a* $[0, \pi]$ *intervallumon,* $[-1, 1]$ *értékkészlettel.*
- $\tan$ *szigorúan monoton növekvő a* $]-\pi/2, \pi/2[$ *intervallumon,* $\mathbf{R}$ *értékkészlettel.*
- $\cot$ *szigorúan monoton csökkenő a* $]0, \pi[$ *intervallumon,* $\mathbf{R}$ *értékkészlettel.*

Inverz szögfüggvények

- Az
$$\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$
arcus-sinus függvény a sin függvény $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumra való megszorításának inverz-függvénye.
- Az
$$\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$$
arcus-cosinus függvény a cos függvény $[0, \pi]$ intervallumra való megszorításának inverz-függvénye.
- Az
$$\arctan : \mathbf{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$$
arcus-tangens függvény a tan függvény $]-\pi/2, \pi/2[$ intervallumra való megszorításának inverz-függvénye.
- Az
$$\operatorname{arccot} : \mathbf{R} \to]0, \pi[$$
arcus-cotangens függvény a cot függvény $]0, \pi[$ intervallumra való megszorításának inverz-függvénye.

Hiperbolikus szögfüggvények

Az e^x függvényből származtathatjuk az ún. hiperbolikus szögfüggvényeket:

- a cosinus hiperbolicus
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$
- a sinus hiperbolicus
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$
- a tangens hiperbolicus
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
- $x \neq 0$ esetén a cotangens hiperbolicus
$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

A hiperbolikus szögfüggvények alaptulajdonságai

- A hiperbolikus szögfüggvények értelmezési tartományukon folytonosak.
- sinh páratlan, cosh páros, tanh és coth páratlanok.
- Minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

- sinh értékkészlete $\mathbf{R}$, cosh értékkészlete $[1, +\infty[$.
- tanh értékkészlete $]-1, 1[$, coth értékkészlete $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
- sinh szigorúan monoton növekvő $\mathbf{R}$-en, cosh szigorúan monoton növekvő $\mathbf{R}_+$-on, cosh-nak globális minimuma van $x = 0$-ban, 1 értékkel.
- tanh szigorúan monoton növekvő $\mathbf{R}$-en, coth szigorúan monoton csökkenő $\mathbf{R}_+$-on és $\mathbf{R}_-$-on.

A hiperbolikus szögfüggvények inverzei

- Az
$$\operatorname{arsinh} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
area-sinus hiperbolicus függvény a sinh függvény inverz-függvénye.
- Az
$$\operatorname{arcosh} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$$
area-cosinus hiperbolicus függvény a cosh függvény $[0, +\infty[$ félegyenesre való megszorításának inverz-függvénye.
- Az
$$\operatorname{artanh} :]-1, 1[\to \mathbf{R}$$
area-tangens hiperbolicus függvény a tanh függvény inverz-függvénye.
- Az
$$\operatorname{arcoth} :]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\to \mathbf{R} \setminus \{0\}$$
area-cotangens hiperbolicus függvény a coth függvény inverz-függvénye.

Képletek az inverz hiperbolikus szögfüggvényekre

Állítás

- *Minden* $x \in \mathbf{R}$ *esetén*
$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$
- *Minden* $x \in [1, +\infty[$ *esetén*
$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$
- *Minden* $x \in]-1, 1[$ *esetén*
$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
- *Minden* $|x| > 1$ *esetén*
$$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$