9. előadás: Differenciál-hányados, elemi függvények deriváltja

Szabó Szilárd

Differencia-hányados

Legyenek $a < b \in \mathbf{R}$ és rögzítsünk egy $x_0 \in]a, b[$ számot. Legyen

$$f :]a, b[\to \mathbf{R}$$

valós függvény. Ekkor az f függvény x_0-beli differencia-hányadosa vagy különbségi hányadosa:

$$g :]a, b[\setminus \{x_0\} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Differenciál-hányados

Azt mondjuk, hogy f-nek az x_0-beli differenciál-hányadosa létezik és egyenlő A-val, ha teljesül

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

Ha f-nek létezik az x_0-beli differenciál-hányadosa, akkor azt is mondjuk hogy f differenciálható x_0-ban. Azt mondjuk, hogy f differenciálható $]a, b[$-on, ha minden $x_0 \in]a, b[$ pontjában differenciálható.

Jelölés

$$f'(x_0) = A, \quad \frac{df}{dx}|_{x_0} = A;$$

amennyiben a változó valamely t idő-paraméter, akkor szokásos még:

$$\dot{f}(t_0).$$

Derivált függvény

Legyen

$$f :]a, b[\to \mathbf{R}$$

differenciálható valós függvény. Ekkor f derivált (származtatott) függvénye:

$$\begin{aligned} f' :]a, b[&\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto f'(x). \end{aligned}$$

Féloldali differenciál-hányados

Azt mondjuk, hogy f-nek az x_0-beli bal-, illetve jobboldali differenciál-hányadosa létezik és egyenlő A-val, ha teljesül

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A,$$

illetve

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A,$$

Ezekben az esetekben f-et balról, illetve jobbról differenciálhatónak nevezzük.

Állítás

Az f függvény akkor és csak akkor differenciálható x_0-ban, ha az x_0-beli féloldali differenciál-hányadosai léteznek és megegyeznek.

A differenciál-hányados mértani jelentése

Az

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

különbségi hányados az f gráfján elhelyezkedő $(x_0, f(x_0))$ és $(x, f(x))$ pontokat összekötő szelő meredeksége. Mivel a differenciál-hányados ezen értékek határértéke, amint $x \to x_0$, és a megfelelő szelők ekkor az x_0 pontbeli értintőhöz tartanak, azért $f'(x_0)$ egyenlő az x_0 pontbeli értintő meredekségével (amennyiben utóbbi létezik).

Az abszolút-érték függvény

Példa

Legyen $f(x) = |x|$ *és* $x_0 = 0$. *Ekkor minden* $x < 0$ *esetén*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = -1$$

és minden $x > 0$ *esetén*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = 1.$$

A féloldali differenciál-hányadosok léteznek 0*-ban, mégpedig a baloldali egyenlő* (-1)*-gyel, a jobboldali pedig* 1*-gyel. Az abszolút-érték függvény tehát nem differenciálható* $x_0 = 0$*-ban.*

A differenciálhatóságból következik a folytonosság

Állítás

Ha f differenciálható x_0-ban, akkor f folytonos is x_0-ban.

Bizonyítás

Amennyiben

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

akkor az x_0-beli differenciál-hányados

$$\frac{\neq 0}{0}$$

alakú, és emiatt nem lehet konvergens.

Állandó és összegfüggvény differenciál-hányadosa

- Ha minden x-re $f(x) = c$ akkor minden x_0-ra $f'(x_0) = 0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$

- Ha f és g differenciálhatók x_0-ban, akkor $f + g$ is, és $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \\ + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Szorzatfüggvény differenciál-hányadosa

Állítás

Ha f és g differenciálhatók x_0-ban, akkor fg is, és

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Többek között, minden $c \in \mathbf{R}$ esetén $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.

Bizonyítás

$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{[f(x)g(x) - f(x_0)g(x)] + [f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)]}{x - x_0} \\
&= g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&\to g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0),
\end{aligned}$$

ahol az utolsó sorban használtuk g folytonosságát.

Hányados-függvény differenciál-hányadosa

Állítás

Ha f és g differenciálhatók x_0-ban, továbbá $g(x_0) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is, és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Többek között,

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Bizonyítás

Mivel

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g},$$

és a szorzatfüggvény differenciál-hányadosát már kifejeztük a tényezők differenciál-hányadosából, azért elegendő belátni az $f(x) = 1$ esetet.

Hányados-függvény differenciál-hányadosa, bizonyítás

Bizonyítás (vége)

Vegyük észre, hogy

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{(x - x_0)}$$
$$\to -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)},$$

mert g folytonos x_0-ban és $g(x_0) \neq 0$.

Összetett függvények differenciál-hányadosa (lánc-szabály)

Állítás

Ha g differenciálható x_0-ban és f differenciálható $g(x_0)$-ban, akkor $f \circ g$ is differenciálható x_0-ban, és

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Bizonyítás

Vezessük be az $y = g(x)$, $y_0 = g(x_0)$ jelöléseket. Ezekkel:

$$\begin{aligned}
\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(y) - f(y_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0} \\
&= \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&\to f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).
\end{aligned}$$

Inverz-függvény differenciál-hányadosa

Állítás

Ha g differenciálható x_0-ban és $g'(x_0) \neq 0$, továbbá g-nek létezik g^{-1} inverze x_0 körül, akkor g^{-1} is differenciálható $g(x_0)$-ban és

$$\left(g^{-1}\right)'(g(x_0)) = \frac{1}{g'(x_0)}.$$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a lánc-szabályt $f = g^{-1}$ választással: ekkor $(g^{-1} \circ g)(x) = x$ és

$$x'(x_0) = \left(g^{-1}\right)'(g(x_0))g'(x_0).$$

A bal oldal könnyen meghatározható:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1.$$

Paraméterrel kifejezett függvény differenciál-hányadosa

Tegyük fel, hogy mind x mind y valamely t paraméter differenciálható függvénye, ahol $t \in]\alpha, \beta[$. Legyen $t_0 \in]\alpha, \beta[$ tetszőleges, és

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0).$$

Tegyük fel hogy y_0 valamely környezetében y egyértelműen kifejezhető t-nek az $x(t)$ függvényében.

Példa

Ha $x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(t)$ *és* $t_0 = \pi/4$, *akkor mivel minden* t*-re* $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$, *valamint* $y(t_0) > 0$, *azért* $y = +\sqrt{1 - x^2}$.

Állítás

A fenti feltételek mellett tegyük fel, hogy $\dot{x}(t_0) \neq 0$. *Ekkor*

$$y'(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}.$$

Paraméterrel kifejezett függvény differenciál-hányadosa, bizonyítás

Bizonyítás

Vegyük észre, hogy

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y-y_0}{t-t_0} \cdot \frac{t-t_0}{x-x_0}$$
$$= \frac{y-y_0}{t-t_0} \cdot \left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right)^{-1}$$
$$\to \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$$

amint $t \to t_0$ *(és emiatt egyúttal* $x(t)$ *folytonossága miatt* $x \to x_0$*).*

Polinomfüggvény differenciál-hányadosa

Állítás

Az $f(x) = x^n$ *függvény minden* $n \in \mathbf{N}$ *esetén differenciálható* $\mathbf{R}$*-en, és* $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

Bizonyítás

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}) \\ &= (x_0^{n-1} + \cdots + x_0^{n-1}) \\ &= nx_0^{n-1}.\end{aligned}$$

Hatvány-függvény differenciál-hányadosa

Állítás

Az $f(x) = x^\alpha$ függvény minden $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén differenciálható $\mathbf{R}_+$-on, és $f'(x_0) = \alpha x_0^{\alpha-1}$.

Bizonyítás

Először megmutatjuk $\alpha = \frac{1}{n}$ esetében: mivel ez a $g(x) = x^n$ inverz-függvénye, azért

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(f(x_0))} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x_0}^{n-1}} = \frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1}.$$

Ezután megmutatjuk $\alpha = \frac{m}{n}$ esetében, használva a lánc-szabályt:

$$f'(x_0) = m\sqrt[n]{x_0}^{m-1}\left(\frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1}\right) = \frac{m}{n} x_0^{\frac{m}{n}-1}.$$

Irracionális α esetén egy folytonossági érvelés adja az összefüggést.

Exponenciális függvények deriváltja

Állítás

Az e^x függvény deriváltja saját maga:

$$(e^x)' = e^x.$$

Bizonyítás

Láttuk, hogy $e^x = \lim_{k\to\infty} s_k(x)$, *ahol*

$$s_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}.$$

Vegyük észre, hogy $s_k'(x) = s_{k-1}(x)$. *Mivel a sor egyenletesen konvergens, azért (egy, a későbbiekben sorra kerülő tétel miatt)*

$$(e^x)' = \lim_{k\to\infty} (s_k)'(x) = \lim_{k\to\infty} s_{k-1}(x) = e^x.$$

Exponenciális függvények deriváltja, folyt.

Legyen most $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$.

Állítás

Ekkor

$$(a^x)' = \ln(a)a^x.$$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a lánc-szabályt:

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \left(e^{x\ln(a)}\right)' \\ &= \ln(a)e^{x\ln(a)} \\ &= \ln(a)a^x.\end{aligned}$$

Logaritmus-függvények deriváltja

Állítás

Minden pozitív x esetén

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Bizonyítás

Alkalmazzuk az inverz-függvényre vonatkozó differenciálási szabályt:

$$\begin{aligned}(\ln(x))' &= \frac{1}{(e^y)'|_{y=\ln(x)}} \\ &= \frac{1}{e^y|_{y=\ln(x)}} \\ &= \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Logaritmus-függvények deriváltja, folyt.

Legyen most $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$.

Állítás

Minden pozitív x esetén

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a)x}.$$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a lánc-szabályt:

$$\begin{aligned}(\log_a(x))' &= \frac{1}{\ln(a)}(\ln(x))' \\ &= \frac{1}{\ln(a)x}.\end{aligned}$$

Szögfüggvények deriváltja, I.

Először vizsgáljuk a következő határértéket:

Állítás

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Bizonyítás

Elemi geometriából láthatjuk, hogy minden $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ *esetén*

$$\sin(x) < x < \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Innen átrendezéssel:

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

A rendőr-elvből nyerjük az állítást.

Szögfüggvények deriváltja, II.

Állítás

$$\sin'(x) = \cos(x).$$

Bizonyítás

Felhasználva egy ismert addíciós képletet és a $\sin(x)/x$ *határértéket:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \lim_{x\to x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \\
&= 1\cdot\cos(x_0),
\end{aligned}$$

mert

$$\frac{x+x_0}{2} \to x_0 \quad (x \to x_0).$$

Szögfüggvények deriváltja, III.

Állítás

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

Bizonyítás

Ismét egy addíciós képletből:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\cos(x)-\cos(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{-2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0} \\
&= -\lim_{x\to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \lim_{x\to x_0} \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \\
&= -1 \cdot \sin(x_0).
\end{aligned}$$

Szögfüggvények deriváltja, IV.

Állítás

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2.$$

Bizonyítás

Felhasználva a hányados-függvény deriváltjára vonatkozó szabályt valamint a $\sin' = \cos$ *és* $\cos' = -\sin$ *képleteket:*

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\
&= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} \\
&= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} \\
&= \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2}.
\end{aligned}$$

Szögfüggvények deriváltja, V.

Állítás

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin(x)^2} = -(1 + \cot(x)^2).$$

Bizonyítás

Hasonlóan $\tan'$*-hoz:*

$$\begin{aligned}
\cot'(x) &= \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' \\
&= \frac{\cos'(x)\sin(x) - \cos(x)\sin'(x)}{\sin(x)^2} \\
&= -\frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\sin(x)^2} \\
&= -\frac{1}{\sin(x)^2} = -1 - \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2}.
\end{aligned}$$

Inverz szögfüggvények deriváltja, I.

Állítás

Minden $|x| < 1$ *esetén*

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bizonyítás

Az inverz-függvényre vonatkozó differenciálási szabályból:

$$\begin{aligned}
(\arcsin(x))' &= \frac{1}{\sin'(y)|_{y=\arcsin(x)}} \\
&= \frac{1}{\cos(y)|_{y=\arcsin(x)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)|_{y=\arcsin(x)}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Inverz szögfüggvények deriváltja, II.

Állítás

Minden $|x| < 1$ *esetén*

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bizonyítás

Ismét az inverz-függvény differenciálási szabályát használjuk:

$$\begin{aligned}(\arccos(x))' &= \frac{1}{\cos'(y)|_{y=\arccos(x)}} \\ &= -\frac{1}{\sin(y)|_{y=\arccos(x)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}|_{y=\arccos(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Inverz szögfüggvények deriváltja, III.

Állítás

Minden $x \in \mathbf{R}$ *esetén*

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Bizonyítás

Hasonlóan $\arcsin'$*-hoz és* $\arccos'$*-hoz:*

$$\begin{aligned}(\arctan(x))' &= \frac{1}{\tan'(y)|_{y=\arctan(x)}} \\ &= \frac{1}{1+\tan(y)^2|_{y=\arctan(x)}} \\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Inverz szögfüggvények deriváltja, IV.

Állítás

Minden $x \in \mathbf{R}$ *esetén*

$$(\operatorname{arccot}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Bizonyítás

Hasonlóan $\arctan'$*-hoz:*

$$\begin{aligned}(\operatorname{arccot}(x))' &= \frac{1}{\cot'(y)|_{y=\operatorname{arccot}(x)}} \\ &= -\frac{1}{1+\cot(y)^2|_{y=\operatorname{arccot}(x)}} \\ &= -\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Hiperbolikus szögfüggvények deriváltja, I.

Állítás

Minden $x \in \mathbf{R}$ *esetén*

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$
$$\cosh'(x) = \sinh(x).$$

Bizonyítás

$$\sinh'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x),$$

és

$$\cosh'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x).$$

Hiperbolikus szögfüggvények deriváltja, II.

Állítás

Minden $x \in \mathbf{R}$ *esetén*

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh(x)^2} = 1 - \tanh(x)^2$$

$$\coth'(x) = -\frac{1}{\sinh(x)^2} = 1 - \coth(x)^2.$$

Bizonyítás

Csak az első összefüggést látjuk be, a második hasonlóan megy. Az eddigiek alapján:

$$\tanh'(x) = \frac{\sinh'(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh(x)^2}$$

$$= \frac{\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2}{\cosh(x)^2} = \frac{1}{\cosh(x)^2}.$$

Az inverz hiperbolikus szögfüggvények deriváltja, I.

Állítás

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

ahol utóbbi képlet minden $x > 1$ esetén áll.

Bizonyítás

Ismét csak az első összefüggést látjuk be. Az inverz-függvény differenciálási szabálya alapján:

$$(\operatorname{arsinh}(x))' = \frac{1}{\sinh'(y)|_{y=\operatorname{arsinh}(x)}} = \frac{1}{\cosh(y)|_{y=\operatorname{arsinh}(x)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(y)}|_{y=\operatorname{arsinh}(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Az inverz hiperbolikus szögfüggvények deriváltja, II.

Állítás

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$
$$\operatorname{arcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

ahol előbbi képlet minden $|x| < 1$*, míg utóbbi minden* $|x| > 1$ *esetén áll.*

Bizonyítás

Az első képletet bizonyítjuk az inverz-függvény differenciálási szabálya alapján:

$$(\operatorname{artanh}(x))' = \frac{1}{\tanh'(y)|_{y=\operatorname{artanh}(x)}} = \frac{1}{1-\tanh(y)^2|_{y=\operatorname{artanh}(x)}}$$
$$= \frac{1}{1-x^2}.$$