10. előadás: Középérték-tételek, a differenciál-számítás főtétele, L'Hospital-szabály

Szabó Szilárd

Monotonitás és differenciál-hányados

Legyen $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ differenciálható x_0-ban, ahol $x_0 \in]a, b[$.

Állítás

- *Ha f monoton növekvő $]a, b[$-on, akkor $f'(x_0) \geq 0$.*
- *Ha $f'(x_0) > 0$ akkor létezik olyan $]\alpha, \beta[$ intervallum x_0 körül, amelyen f szigorúan monoton növekvő.*

Bizonyítás

Ha f monoton növekvő $]a, b[$-on, akkor minden $x \in]a, b[$ esetén

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

a határértékük tehát nem-negatív.

Monotonitás és differenciál-hányados, folyt.

Bizonyítás (vége)

Fordítva, ha $f'(x_0) = 2\varepsilon > 0$, *akkor létezik olyan* $\delta > 0$ *amelyre minden* $0 < |x - x_0| < \delta$ *esetén*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \varepsilon,$$

tehát f *szigorúan monoton növekvő* $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$*-on.*

Szélsőérték és differenciál-hányados

Állítás

Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás

Tegyük fel például, hogy a szélsőérték maximum (minimumra hasonló a gondolatmenet). Ekkor létezik olyan $\delta > 0$ hogy minden $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ esetén

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

és minden $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ esetén

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Mivel a két féloldali határérték azonos, azért $f'(x_0) = 0$.

Kritikus pontok

Definíció

Valamely $x_0 \in]a, b[$ *kritikus pontja* f*-nek, ha* $f'(x_0) = 0$.

Láttuk: minden lokális szélsőérték kritikus pont. Ennek fordítottja nem igaz:

Példa

Legyen $f(x) = x^3$*, ekkor* $f'(x) = 3x^2$*, tehát* $x_0 = 0$ *kritikus pont de nem lokális szélsőérték.*

Rolle középérték-tétele

Tétel (Rolle)

Ha $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *folytonos és differenciálható* $]a, b[$*-n, valamint* $f(a) = f(b)$*, akkor létezik olyan* $x_0 \in]a, b[$*, amelyre*

$$f'(x_0) = 0.$$

Bizonyítás

Weierstrass szélsőérték-tétele miatt létezik olyan $c \in [a, b]$ *ahol* f*-nek globális minimuma van. Ha* $c = a$ *vagy* $c = b$ *akkor* f *alsó korlátja* $[a, b]$*-n* $f(a) = f(b)$*. Ekkor vagy* f *állandó függvény, és ekkor bármely* $x_0 \in]a, b[$ *megfelelő, vagy pedig felveszi a maximumát valamely* $d \in]a, b[$ *helyen. Minden esetben, amikor* f *nem állandó, találtunk tehát* $x_0 = c$ *vagy* $x_0 = d$ *lokális szélsőérték-helyet* $]a, b[$*-ban. Az előző tétel miatt ekkor* $f'(x_0) = 0$*.*

Lagrange középérték-tétele

Tétel (Lagrange)

Ha $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *folytonos és differenciálható* $]a, b[$*-n, akkor létezik olyan* $x_0 \in]a, b[$*, amelyre*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bizonyítás

A

$$\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

függvény teljesíti Rolle tételének feltételeit: $\phi(a) = f(a) = \phi(b)$. *Alkalmazzuk Rolle tételét* ϕ*-re: létezik olyan* $x_0 \in]a, b[$*, amelyre*

$$0 = \phi'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A differenciál-számítás főtétele

Tétel

Ha $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *folytonos és differenciálható* $]a, b[$*-n, valamint* $f'(x) = 0$*, akkor* f *állandó függvény. Többek között, ha* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *folytonosak és differenciálhatók* $]a, b[$*-n, valamint* $f'(x) = g'(x)$*, akkor* $f - g$ *állandó függvény.*

Bizonyítás

Az első állításhoz, bármely $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ *esetén létezik olyan* $x_2 \in]x_0, x_1[$*, amelyre*

$$f(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0)f'(x_2) = 0,$$

tehát $f(x_1) = f(x_0)$*. A második állításhoz alkalmazzuk az első állítást az* $(f - g)$ *függvényre.*

Cauchy középérték-tétele

Tétel (Cauchy)

Ha $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *folytonosak és differenciálhatók* $]a, b[$*-n, valamint minden* $x \in]a, b[$ *esetén* $g'(x) \neq 0$*, akkor létezik olyan* $c \in]a, b[$*, amelyre*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bizonyítás

Rolle tétele és a $g'(x) \neq 0$ *feltétel miatt* $g(b) - g(a) \neq 0$*. Vezessük be az*

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

segédfüggvényt. Mivel $F(a) = F(b) = 0$*, alkalmazhatjuk Rolle tételét.*

Cauchy középérték-tétele, folyt.

Bizonyítás (folyt.)

Rolle tételéből: létezik olyan $c \in]a, b[$, *amelyre*

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

Innen átrendezéssel nyerjük a kívánt állítást.

L'Hospital-szabály

Tétel (Bernoulli)

Legyenek $-\infty \leq a < b \leq \infty$, *és* $f, g :]a, b[\to \mathbf{R}$ *differenciálhatók, valamint minden* $x \in]a, b[$ *esetén* $g(x) \neq 0$ *és* $g'(x) \neq 0$. *Tegyük fel, hogy*

$$f(x) \to 0, \quad g(x) \to 0 \quad (x \to a)$$

vagy

$$g(x) \to +\infty \quad (x \to a).$$

Ekkor, ha

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \quad (x \to a)$$

akkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \quad (x \to a).$$

L'Hospital-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Vizsgáljuk az

$$f(x) \to 0, \quad g(x) \to 0 \quad (x \to a)$$

esetet. Legyen $\varepsilon > 0$ *tetszőlegesen rögzített, és* $\delta > 0$ *olyan, hogy ha* $z \in]a, a+\delta[$ *akkor*

$$\left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A Cauchy-féle középérték-tétel miatt minden $a < y < x < a + \delta$ *választáshoz létezik olyan* $z \in]y, x[$, *amelyre*

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

L'Hospital-szabály bizonyítása

Bizonyítás (folyt.)

Rögzítsük most x-et és tartson $y \to a$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{y \to a} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(x)}{g(x)} \in \left[A - \frac{\varepsilon}{2}, A + \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Mivel

$$\left[A - \frac{\varepsilon}{2}, A + \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset]A - \varepsilon, A + \varepsilon[,$$

azért minden $x \in]a, a + \delta[$ esetén

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in]A - \varepsilon, A + \varepsilon[,$$

bizonyítva az állítást.

Második derivált

Definíció

- *Ha $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ differenciálható, és az $f' :]a, b[\to \mathbf{R}$ függvény folytonos valamely $x_0 \in]a, b[$ helyen, akkor azt mondjuk, hogy f folytonosan differenciálható x_0-ban.*
- *Ha f folytonosan differenciálható minden x_0-ban, akkor (mindenütt) folytonosan differenciálhatónak mondjuk.*
- *Ha $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ differenciálható, és az $f' :]a, b[\to \mathbf{R}$ függvény differenciálható valamely $x_0 \in]a, b[$ helyen, akkor azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható x_0-ban.*
- *Ha f kétszer differenciálható minden x_0-ban, akkor (mindenütt) kétszer differenciálhatónak mondjuk.*

Magasabb rendű deriváltak

Jelölés

Ha f kétszer differenciálható valamely x_0-ban, akkor f' differenciál-hányadosát x_0-ban így jelöljük:

$$f''(x_0).$$

Hasonlóan értelmezhető a háromszoros, négyszeres, s. í. t., végtelenszeres differenciálhatóság fogalma.

Második derivált és szélsőérték

Állítás

Ha f mindenütt differenciálható és x_0-ban kétszer differenciálható, valamint $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$ (illetve, $f''(x_0) > 0$), akkor f-nek x_0-ban maximuma (illetve, minimuma) van.

Bizonyítás

Ha például $f''(x_0) < 0$ és $f'(x_0) = 0$, akkor f' szigoúan monoton csökken $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$-n elég kis $\delta > 0$ esetén. Tehát, $f'(x) > 0$ ha $x < x_0$ és $f'(x) < 0$ ha $x > x_0$, és így f szigorúan monoton növekszik $]x_0 - \delta, x_0[$-n és szigorúan monoton csökken $]x_0, x_0 + \delta[$-n.

Konvex és konkáv függvények

Legyen $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ (vagy $[a, b] \to \mathbf{R}$) egy függvény.

Definíció

Azt mondjuk, hogy f konvex, ha bármely $a < x_1 < x_2 < b$ esetén

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Azt mondjuk, hogy f konkáv, ha bármely $a < x_1 < x_2 < b$ esetén

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Azt mondjuk, hogy f-nek inflexiós pontja van egy $x_0 \in]a, b[$ helyen, ha létezik olyan $\delta > 0$ amelyre f konvex az $]x_0 - \delta, x_0[$ intervallumon és konkáv az $]x_0, x_0 + \delta[$ intervallumon, vagy fordítva.

Érintő, második derivált és konvexitás

Tegyük fel, hogy $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ mindenütt differenciálható.

Állítás

Ha f-nek minden $x \in]a, b[$ pontbeli érintőegyenese alatta (illetve, felette) helyezkedik el f gráfjának, akkor f konvex (illetve, konkáv).

Állítás

- *Ha $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ mindenütt kétszer differenciálható és minden $x \in]a, b[$ esetén $f''(x) \geq 0$, akkor f konvex $]a, b[$-on.*
- *Ha $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ mindenütt kétszer differenciálható és minden $x \in]a, b[$ esetén $f''(x) \leq 0$, akkor f konkáv $]a, b[$-on.*

Második derivált és konvexitás, bizonyítás

Bizonyítás

A második állítás első pontját látjuk be. Ha mindenütt $f''(x) \geq 0$, *akkor* f' *monoton növekvő függvény, azaz minden* $x_1 < x_0 < x_2$ *esetén*

$$f'(x_1) \leq f'(x_0) \leq f'(x_2).$$

Másrészt, a Lagrange-féle középérték-tétel miatt létezik olyan $x_0 \in]x_1, x_2[$ *amelyre*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Innen

$$f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_2)$$

A bal oldalon álló kifejezés éppen f x_1*-beli érintőegyenesének* x_2 *feletti pontja. Hasonlóan kapjuk azt is, hogy*

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

Harmadik derivált és inflexió

Állítás

Ha f mindenütt kétszer differenciálható és x_0-ban háromszor differenciálható, valamint $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.

Bizonyítás

Tegyük fel például, hogy $f'''(x_0) > 0$. Ekkor f'' szigorúan monoton növekvő valamely $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$-n. A feltételek miatt létezik olyan $\delta > 0$ hogy minden $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ esetén $f''(x) < 0$, minden $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ esetén pedig $f''(x) > 0$, így f konkáv $]x_0 - \delta, x_0[$-n és konvex $]x_0, x_0 + \delta[$-n.