

11. előadás: Szakadások fajtája, aszimptoták, teljes függvényvizsgálat

Szabó Szilárd

Szakadások

Legyen $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ és $x_0 \in]a, b[$. Azt mondjuk, hogy f -nek **szakadása van** x_0 -ban (vagy x_0 **szakadási pontja** f -nek), ha f nem folytonos x_0 -ban.

Azt mondjuk, hogy f -nek x_0 **megszüntethető szakadási pontja**, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

léteznek, és megegyeznek egymással. Ekkor f értékét x_0 -ban megváltoztatva f -et folytonossá tehetjük.

Azt mondjuk, hogy f -nek x_0 **elsőfajú szakadási pontja**, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

léteznek (végesek), de különböznek egymástól.

Azt mondjuk, hogy f -nek x_0 **másodfajú szakadási pontja**, ha szakadási pontja, de nem megszüntethető és nem elsőfajú.

Aszimptoták

Legyen $f : [R, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ és $m, b \in \mathbf{R}$. Azt mondjuk, hogy f -nek **$+\infty$ -beli aszimptotája** az $y = mx + b$ egyenes, ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - b) = 0.$$

Hasonlóan értelmezhető a $-\infty$ -beli aszimptota fogalma is.

Tétel

f -nek akkor és csak akkor aszimptotája az $y = mx + b$ egyenes, ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

és

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = b$$

Teljes függvényvizsgálat

Egy f valós függvény **teljes függvényvizsgálata** alatt a következőket értjük:

1. értelmezési tartomány, paritás, periodikusság megállapítása;
2. folytonosság, szakadási pontok fajtája, féloldali határértékek kiszámolása a szakadási pontokban és $\pm\infty$ -ben;
3. f' értelmezési tartományának meghatározása, f' kiszámolása, monotonitási intervallumok, szélsőérték-helyek meghatározása;
4. f'' értelmezési tartományának meghatározása, f'' kiszámolása, konvexitási intervallumok, inflexiós pontok meghatározása;
5. $\pm\infty$ -beli aszimptoták meghatározása;
6. az eddigi eredmények táblázatba foglalása, valamint ezek alapján f görbéjének hevenyészett megrajzolása.