15. előadás: Az integrálszámítás alkalmazásai

Szabó Szilárd

Területszámítás

Legyen $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ korlátos függvény és

$$A = \{(x, y) : \quad a \leq x \leq b, \ \ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Tétel

Ekkor

$$T(A) = \int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás

$T(A)$ megegyezik f téglányösszegeinek minden határon túl finomodó $\mathcal{P}_i$ felosztás-sorozatokra vett határértékével.

Paraméteresen megadott görbe területe

Legyen most $t \in [\alpha, \beta]$ esetén

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, amelyre minden t esetén $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ injektív folytonosan differenciálható függvénye t-nek. Legyen továbbá

$$A = \{(x(t), y) : \quad \alpha \leq t \leq \beta, \; 0 \leq y \leq y(t)\}.$$

Tétel

Ekkor

$$T(A) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Bizonyítás

Alkalmazzuk az $x = x(t)$ *helyettesítést a következő képletben:*

$$T(A) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Szögtartomány területe

Legyen $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$, $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}_+$ egy korlátos függvény és

$$A = \{(r, \varphi) : \quad \alpha \le \varphi \le \beta, \;\; 0 \le r \le f(\varphi)\}$$

polárkoordinátákban megadott tartomány.

Tétel

Ekkor

$$T(A) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f(\varphi)^2 d\varphi.$$

Bizonyítás

Bármely $\mathcal{P} = (\alpha = \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N = \beta)$ *felosztás esetén*

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k^2 (\varphi_k - \varphi_{k-1}) \le T(A) \le \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} M_k^2 (\varphi_k - \varphi_{k-1});$$

a két szélső összeg határértéke éppen $\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f(\varphi)^2 d\varphi$*.*

Forgástest köbtartalma

Legyen $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ korlátos függvény.

Tétel

Azon forgástest térfogata, amelyet f gráfjának az $x = a$ és $x = b$ síkok közötti részének x-tengely körüli megforgatásával nyerünk:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Bizonyítás

Bármely $\mathcal{P} = (a = x_0, x_1, \ldots, x_N = b)$ *felosztás esetén*

$$\pi \sum_{k=1}^{N} m_k^2 (x_k - x_{k-1}) \leq V \leq \pi \sum_{k=1}^{N} M_k^2 (x_k - x_{k-1}).$$

Rektifikálható görbék

Legyen

$$(x(t), y(t))$$

egy paraméteresen megadott görbe, ahol $t \in [\alpha, \beta]$. Tegyük fel, hogy $x(t)$ és $y(t)$ folytonos függvényei t-nek. Legyen $\mathcal{P} = (\alpha = t_0, t_1, \dots, t_N = \beta)$ egy tetszőleges felosztás, és $P_i = (x(t_i), y(t_i))$. Ekkor, a $P_0 P_1 \dots P_N$ pontok által ebben a sorrendben meghatározott töröttvonalat a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonnak hívjuk. Amennyiben a $\mathcal{P}$-hez tartozó húrpoligonok hosszának létezik határértéke, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, akkor a görbét rektifikálhatónak mondjuk, és a húrpoligonok hosszának határértékét a görbe ívhosszának nevezzük.

Ívhossz-számítás

Tétel

Ha $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálhatók, akkor az $(x(t), y(t))$ görbe rektifikálható, és ívhossza:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt.$$

Speciálisan, ha $x = t \in [a, b]$ és $y = y(x)$ egy függvény, akkor y gráfjának ívhossza:

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

Az ívhossz-képlet bizonyításának ötlete

A $P_0 P_1 \dots P_N$ húrpoligon hossza:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Lagrange középérték-tétele miatt léteznek olyan $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ értékek, amelyekre

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = \dot{x}(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = \dot{y}(\eta_i)(t_i - t_{i-1}).$$

A húrpoligon hossza így:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2}(t_i - t_{i-1}).$$

Itt y egyenletes folytonossága miatt $\dot{y}(\eta_i)$ kicserélhető $\dot{y}(\xi_i)$-ra, akármilyen kicsiny hibataggal, ha $\mathcal{P}$ kellően finom. Az így nyert kifejezés a kívánt integrál egy közelítő összege.

Forgástest palástjának felszíne

Legyen $t \in [\alpha, \beta]$ esetén $(x(t), y(t))$ egy paraméteresen megadott görbe, amelyre minden t esetén $y(t) \geq 0$ és $x(t)$ injektív függvénye t-nek.

Tétel

Ha $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálhatók, akkor az $(x(t), y(t))$ görbe $[\alpha, \beta]$ fölötti darabjának x-tengely körüli megforgatásával kapott felület felszíne:

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt.$$

Speciálisan, ha $x = t \in [a, b]$ és $y = y(x)$ egy folytonosan differenciálható függvény, akkor y gráfjának x-tengely körüli megforgatásával kapott felület felszíne:

$$2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}dx.$$

Tömegpontrendszer súlypontja

Legyen $n \geq 1$, $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbf{R}^2$ pontok és $m_1, \ldots, m_n > 0$ tömegértékek. Legyen

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

$$s_x = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k x_k,$$

$$s_y = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k y_k.$$

Tekintsük azt a tömegpontrendszert, amelyben az (x_k, y_k) pontban m_k tömegű tömegpont helyezkedik el.

Tétel

E rendszer tömegközéppontja (s_x, s_y).

Síktartomány súlypontja

Legyen $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ korlátos függvény és

$$A = \{(x, y) : \quad a \le x \le b, \;\; 0 \le y \le f(x)\}.$$

Legyen

$$T(A) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$s_x = \frac{1}{T(A)} \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x,$$

$$s_y = \frac{1}{2T(A)} \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x.$$

Tétel

Ekkor az A síktartomány tömegközéppontja (s_x, s_y).