# 16. előadás: Improprius integrálok

Szabó Szilárd

# Jobbról végtelen félegyenesen vett improprius integrál

Legyen $f : [a, +\infty[ \to \mathbf{R}$ valós függvény.

### Definíció

*Ha minden $\omega > a$ esetén $f$ Riemann-integrálható az $[a, \omega]$ intervallumon, továbbá létezik a véges*

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_a^\omega f(x)dx$$

*határérték, akkor azt mondjuk hogy létezik (vagy konvergens) $f$ improprius integrálja az $[a, +\infty[$ félegyenesen, és értéke*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\omega \to \infty} \int_a^\omega f(x)dx.$$

*Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az improprius integrál divergens.*

# Balról végtelen félegyenesen vett improprius integrál

Hasonlóan értelmezhető egy $f : ]-\infty, b] \to \mathbf{R}$ függvény improprius integrálja, mint a

$$\int_{\omega}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

integrálok határértéke, amint $\omega \to -\infty$, amennyiben ez a határérték létezik.

## Jelölés

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\omega \to -\infty} \int_{\omega}^{b} f(x)dx.$$

# A teljes számegyenesen vett improprius integrál

Legyen most $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ valós függvény.

### Definíció

*Azt mondjuk, hogy létezik $f$ **R**-en vett improprius integrálja, ha valamely (vagy ekvivalensen, bármely) $a \in \mathbf{R}$ esetén léteznek a*

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

*félegyeneseken vett improprius integrálok. Ekkor az **R**-en vett improprius integrál értéke:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

*(ami független $a \in \mathbf{R}$ választásától).*

# Improprius integrál meghatározása primitív függvénnyel

Jobbról végtelen félegyenes esetében:

## Tétel

*Amennyiben $f$-nek létezik $F$ primitív függvénye, akkor*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\omega\to\infty} F(\omega) - F(a).$$

## Bizonyítás

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_a^\omega f(x)dx = \lim_{\omega\to\infty} (F(\omega) - F(a)) = \lim_{\omega\to\infty} F(\omega) - F(a).$$

Hasonló módon:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - \lim_{\omega\to-\infty} F(\omega).$$

# Bal végpontban nem korlátos függvények improprius integrálja

Legyen most $-\infty < a < b < \infty$ és $f : ]a, b] \to \mathbf{R}$.

## Definíció

*Amennyiben $f$ nem Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, viszont minden $\delta > 0$ esetén integrálható az $[a+\delta, b]$ intervallumon, valamint létezik a*

$$\lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

*határérték, akkor azt mondjuk, hogy $f$-nek létezik az $]a, b]$ intervallumon vett improprius integrálja, és ennek értéke*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx.$$

# Jobb végpontban nem korlátos függvények improprius integrálja

Hasonlóan definiálható a $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ függvény improprius integrálja:

## Definíció

*Amennyiben $f$ nem Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, viszont minden $\eta > 0$ esetén integrálható az $[a, b-\eta]$ intervallumon, valamint létezik a*

$$\lim_{\eta\to 0+0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx$$

*határérték, akkor azt mondjuk, hogy $f$-nek létezik az $[a, b[$ intervallumon vett improprius integrálja, és ennek értéke*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0+0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx.$$

# Mindkét végpontban nem korlátos függvények improprius integrálja

## Definíció

*Amennyiben* $f : ]a, b[ \to \mathbf{R}$ *nem Riemann-integrálható az* $[a, b]$ *intervallumon, viszont valamely (vagy ekvivalens módon, minden)* $c \in ]a, b[$ *esetén léteznek a*

$$\int_a^c f(x)dx, \quad \int_c^b f(x)dx$$

*improprius integrálok, akkor azt mondjuk hogy létezik (konvergens)* $f$ $]a, b[$ *intervallumon vett improprius integrálja, és értéke*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

*(amely független* $c \in \mathbf{R}$ *választásától).*

# Általános improprius integrál

Legyenek most $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Definíció

*Azt mondjuk, hogy létezik f improprius integrálja* $]a, b[$*-on, amennyiben találhatók olyan*

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$$

*osztópontok, amelyekre az*

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$$

*improprius integrál minden* $1 \leq i \leq n$ *esetén létezik az eddig definiált értelmek egyikében.*

# Improprius integrál intervallumok egyesítésén

## Tétel

*Amennyiben létezik $f$ improprius integrálja $]a,b[$-on, akkor bármely $c \in ]a,b[$ esetén létezik $f$ improprius integrálja $]a,c[$-on és $]c,b[$-on is, és*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

## Bizonyítás

*Amennyiben $c = c_i$ valamely $1 \le i \le n$ értékre, akkor definíció szerint igaz. Különben, az állítás következik a Riemann-integrál hasonló tulajdonságából.*

# Majoráns-kritérium az improprius integrálra

### Tétel

*Amennyiben* $f, g : ]a, b[ \to \mathbf{R}$ *olyanok, hogy minden* $x \in ]a, b[$ *esetén* $|f(x)| \leq g(x)$ *és* $g$ *improprius integrálja létezik* $]a, b[$*-on, akkor* $|f|$ *improprius integrálja is létezik* $]a, b[$*-on, és*

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

# Parciális improprius integrál

Legyenek $f, g : [a, b[ \to \mathbf{R}$ nem korlátosak $b$ körül.

## Tétel

*Ha $f, g$ deriválhatók, létezik a*

$$\lim_{\beta \to b-0} f(\beta) g(\beta)$$

*határérték, továbbá a*

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx, \quad \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

*improprius integrálok egyike konvergens, akkor a másikuk is konvergens, és*

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = \lim_{\beta \to b-0} f(\beta) g(\beta) - f(a) g(a) - \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

# Helyettesítéses improprius integrál

Legyenek $-\infty < a < b \leq \infty$ és $-\infty < \alpha < \beta \leq \infty$, valamint $f : [a, b[\to \mathbf{R}$. Legyen $\varphi : [\alpha, \beta[\to [a, b[$ olyan folytonosan differenciálható függvény, amelyre

$$\varphi(\alpha) = a \quad \text{és} \quad \lim_{t \to \beta} \varphi(t) = b.$$

## Tétel

*Amennyiben a*

$$\int_a^b f(t)dt, \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

*improprius integrálok egyike konvergens, akkor a másikuk is az, és értékük azonos:*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$