17. előadás: Vektorok a térben

Szabó Szilárd

A vektor fogalma

A mai előadásban $n \geq 1$ tetszőleges egész szám lehet, de az egyszerűség kedvéért a képletek az $n = 2$ esetben szerepelnek.
Vektorok: rendezett $(P_1 P_2)$ pontpárok, ahol azonosítjuk a $(P_1 P_2)$ és $(Q_1 Q_2)$ párokat, amennyiben P_1, P_2, Q_2, Q_1 ebben a sorrendben egy valamilyen irányban körüljárt parallelogramma egymás után következő csúcspontjai.

Jelölés

$\overrightarrow{P_1 P_2}$.

Minden $\vec{v}$ vektorhoz és P_1 ponthoz létezik egyetlen olyan P_2 pont, hogy $\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{v}$. P_1 neve: $\vec{v}$ kezdőpontja, P_2 neve: $\vec{v}$ végpontja.

Vektorok iránya és hossza

Ha a P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, és ebben a sorrendben követik rajta egymást, akkor azt mondjuk hogy a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_2P_3}$ vektorok egyirányúak, a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_3P_2}$ pedig ellentéttes irányúak. Két vektort párhuzamosnak mondunk, ha egyirányúak vagy ellentétes irányúak.

A nulla-vektor: $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$. Minden $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektorhoz létezik egymással párhuzamos e egyenesek pontosan egy családja, amelyekkel bármely $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ reprezentáció esetén a P_1, P_2 pontpárra illeszkedő egyenes párhuzamos. Ezen párhuzamos egyenesek halmazát $\vec{v}$ irányának nevezzük. A $\vec{0}$ vektornak nem értelmezett az iránya.

Egy $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ hossza a P_1P_2 szakasz hossza.

Tétel

Egy $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektort iránya és hossza egyértelműen meghatározza.

Vektorok összeadása

Legyenek $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ vektorok. Reprezentáljuk $\vec{v}_1$-et tetszőleges P_1 kezdőponttal: $\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ és $\vec{v}_2$-t P_2 kezdőponttal: $\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_2P_3}$. Ekkor $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ összege:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3}.$$

Állítás

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektor esetén

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

valamint

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Végül,

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Vektorok szorzása skalárral

Legyen $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ tetszőleges nem 0 vektor és $\alpha \in \mathbf{R}$ skalár.
Ha $\alpha = 0$ akkor legyen $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.
Tegyük fel, hogy $\alpha > 0$. Ekkor az $\alpha \cdot \vec{v}$ vektort úgy definiáljuk, hogy ha $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ egy reprezentáció, akkor legyen $\alpha \cdot \vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ az egyetlen olyan P_3 pontra, amelyre P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesre illeszkednek, ebben a sorrendben követik rajta egymást, valamint

$$|\alpha \cdot \vec{v}| = \alpha |\vec{v}|.$$

Végül, ha $\alpha < 0$ és $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ akkor legyen $\alpha\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ arra a P_3 pontra, amelyre P_3, P_1, P_2 pontok egy egyenesre illeszkednek, ebben a sorrendben követik rajta egymást, valamint

$$|\alpha \cdot \vec{v}| = -\alpha |\vec{v}|.$$

Speciális eset:

$$-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}.$$

Műveleti azonosságok

Tétel

Minden $\vec{a}, \vec{b}$ vektor és $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$
\begin{aligned}
0 \cdot \vec{a} &= \vec{0} \\
1 \cdot \vec{a} &= \vec{a} \\
(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} &= \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a} \\
(\alpha\beta) \cdot \vec{a} &= \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) \\
\vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} &= \vec{0} \\
\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}
\end{aligned}
$$

Vektortér

Definíció

Egy *valós vektortér* *egy* V *halmaz, ellátva egy* $\vec{0} \in V$ *elemmel, valamint a következő műveletekkel:*

- $+ : V \times V \to V$
- *minden* $\alpha \in \mathbf{R}$ *esetén* $\alpha \cdot : V \to V$,

amelyekre teljesülnek a fent felsorolt tulajdonságok.

Vektorok lineáris függetlensége

Legyen V egy vektortér és legyenek $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

Definíció

A $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ skalárokra vett lineáris kombinációja a

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$$

vektor. A lineáris kombináció triviális, ha $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a lineáris kombináció nem-triviális.
Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok lineárisan függők, ha létezik olyan nem-triviális lineáris kombinációjuk, amely egyenlő $\vec{0}$-val. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

Megjegyzés

Bármely vektorok triviális lineáris kombinációja a $\vec{0}$.

Vektortér generátor-rendszere, bázisa

Legyen V egy vektortér és legyenek $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *vektorok* V *egy* ***generátor-rendszerét*** *alkotják, ha bármely* $\vec{v} \in V$ *esetén létezik* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$*-nek olyan lineáris kombinációja, amely megegyezik* $\vec{v}$*-vel.*
Azt mondjuk, hogy $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *vektorok* V *egy* ***bázisát*** *alkotják, ha lineárisan függetlenek és generátor-rendszert alkotnak.*
Amennyiben V*-nek létezik véges elemszámú bázisa, akkor egy bázisának (egyértelműen meghatározott) elemszámát* V ***dimenziójának*** *nevezzük.*

Tétel

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *akkor és csak akkor alkot bázist, ha minden* $\vec{v} \in V$ *előáll egyértelműen* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *lineáris kombinációjaként.*

Bázisra vonatkozó koordináták

Legyen V egy vektortér és $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ egy bázisa.

Definíció

Egy tetszőleges $\vec{v} \in V$ $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$-re vonatkozó koordinátái az egyetlen olyan $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$, amelyre

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \cdots + v_n\vec{e}_n.$$

Tétel

Legyenek a $\vec{v}, \vec{w} \in V$ koordinátái az $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ bázisra nézve rendre $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbf{R}^n$. Ekkor, $\vec{v} + \vec{w}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve:

$$(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n).$$

Bármely $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén $\alpha \cdot \vec{v}$ koordinátái ugyanerre a bázisra nézve:

$$(\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n).$$

A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer

Az euklideszi sík 2-dimenziós, tehát egy $\vec{i}, \vec{j}$ bázisára vonatkozó koordináták segítségével azonosíthatjuk $\mathbf{R}^2$-vel. Így, $\mathbf{R}^2$ vektorteret alkot. Legyenek (x, y) egy P pont koordinátái $\vec{i}, \vec{j}$-re nézve. Ekkor x neve: P abszcisszája, y neve: P ordinátája. Az $O(0,0)$ pont: a koordináta-rendszer origója.

Általánosabban: minden $n \geq 1$ esetén $\mathbf{R}^n$ vektorteret alkot.

Legyen $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ két pont. Ekkor P_1 és P_2 egymástól mért távolsága (Pithagorasz):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Így

$$|\vec{i}| = 1 = |\vec{j}|.$$

Megjegyzés

A távolság-fogalom nem része a vektortér definíciójának.

Skalár-szorzat vektortéren

Legyen V egy vektortér.

Definíció

Egy skalár-szorzat V-n egy olyan

$$\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbf{R}$$

függvény, amelyre minden $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ és $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ esetén

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$
$$\langle \alpha \cdot \vec{a}, \beta \cdot \vec{b} \rangle = \alpha\beta \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$
$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$
$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0 \quad \textit{ha } \vec{a} \neq \vec{0}.$$

Példa

A szokványos skalár-szorzat $V = \mathbf{R}^n$-en:

$$\langle (v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n.$$

Euklideszi vektortér, hossz, hajlásszög

Definíció

Egy $\langle .,. \rangle$ *skalár-szorzattal ellátott* V *vektorteret euklideszi térnek hívunk. Ha* $V, \langle .,. \rangle$ *euklideszi tér akkor egy* $\vec{v} \in V$ *hossza:*

$$|\vec{v}| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

Cauchy-egyenlőtlenség:

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq |\vec{v}||\vec{w}|.$$

Két $\vec{v}, \vec{w} \in V$ *vektor által közbezárt szög az (előjel és* 2π *egy egész számú többszöröse erejéig) egyetlen olyan* $\varphi \in \mathbf{R}$*, amelyre*

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}||\vec{w}|}.$$

Többek között, $\vec{v}, \vec{w}$ *merőlegesek egymásra (jelölés:* $\vec{v} \perp \vec{w}$*), ha* $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$*, azaz* $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.

Vektor párhuzamos és merőleges komponense másik egy vektorra nézve

Legyen $V, \langle .,. \rangle$ euklideszi tér és $\vec{v} \neq \vec{0}, \vec{w} \in V$.

Állítás

Létezik pontosan egy olyan $(\vec{w}_0, \vec{w}_1) \in V^2$ vektorpáros, amelyre

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{w}_1,$$

és $\vec{w}_0$ párhuzamos $\vec{v}$-vel, $\vec{w}_1$ pedig merőleges $\vec{v}$-re.

Bizonyítás

Legyen

$$\vec{w}_0 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v},$$

ekkor nyilván $\vec{w}_0$ párhuzamos $\vec{v}$-vel. Legyen $\vec{w}_1 = \vec{w} - \vec{w}_0$, akkor

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle &= \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w}_0 \rangle \\ &= \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Síkbeli polár-koordináták

Egy $P(x, y) \neq O$ pont esetén legyen

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0,$$

$\varphi \in \mathbf{R}$ pedig egy olyan szög, amelyre

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r}, \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{r}.$$

Ekkor φ jól meghatározott 2π egy egész számú többszöröse erejéig. (V.ö. a $z = x + yi$ komplex szám trigonometriai alakjával.)