18. előadás: Vektorok vektoriális és vegyes szorzata

Szabó Szilárd

Vektorok vektoriális szorzata

A mai előadásban $n = 3$ és $V = \mathbf{R}^3$ a szokványos skalár-szorzattal.

Definíció

Legyenek $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ és $\varphi \in [0, \pi]$ az általuk közbezárt szög. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok vektoriális szorzata az egyetlen olyan $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor, amelyre

- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\varphi)$
- *$\vec{a} \times \vec{b}$ merőleges $\vec{a}$-ra és $\vec{b}$-re*
- *$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot: $\vec{a} \times \vec{b}$ irányából szemlélve a $\vec{a}, \vec{b}$ által kifeszített síkot, a $\vec{a}$ vektort valamely $(0, \pi)$ szöggel való elforgatás egy $\vec{b}$-vel egyirányú vektorba viszi.*

Megjegyzés

Definíció szerint, ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ valamelyike $\vec{0}$, akkor a vektoriális szorzatuk is $\vec{0}$.

A vektoriális szorzat eltűnésének feltétele

Állítás

Az $\vec{a}$ *és* $\vec{b}$ *vektorok vektoriális szorzata akkor és csak akkor* $\vec{0}$*, ha* $\vec{a}$ *és* $\vec{b}$ *párhuzamosak.*

Bizonyítás

Megegyezés szerint, $\vec{0}$ *bármely másik vektorral párhuzamos, tehát feltehetjük hogy* $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$. *Ekkor, egyrészt* $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ *miatt amennyiben* $\vec{a}$ *és* $\vec{b}$ *párhuzamosak akkor* $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$*; másrészt pedig minden* $\varphi \in]0, \pi[$ *esetén* $\sin(\varphi) \neq 0$ *miatt* $|\vec{a} \times \vec{b}| \neq 0$*.*

A vektoriális szorzat ferde kommutativitása

Állítás

Minden $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ *esetén*

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}.$$

Bizonyítás

Ha $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ *jobbsodrású rendszert alkotnak, akkor ugyanez igaz a* $\vec{b}, \vec{a}, -\vec{a} \times \vec{b}$ *rendszerre is. A* $\vec{b} \times \vec{a}$*-t definiáló másik két tulajdonság nyilván teljesül a*

$$-\vec{a} \times \vec{b}$$

vektorra.

A vektoriális szorzat linearitása

Állítás

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ *és* $\alpha \in \mathbf{R}$ *esetén*

$$(\alpha \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha \cdot \vec{b})$$

és

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Bizonyítás

Az első állítás nyilvánvaló. A második állítás $\vec{a} = 0$ *esetben szintén nyilvánvaló, különben az első állítás segítségével* ($\alpha = \frac{1}{|\vec{a}|}$ *választással) visszavezethetjük az* $|\vec{a}| = 1$ *esetre. Ekkor,* $\vec{a} \times \vec{b}$*-t megkaphatjuk a* $\vec{b}$ *vektor* $\vec{a}$*-ra merőleges síkra vett merőleges vetületének* $\vec{a}$ *felől nézve* $\frac{\pi}{2}$ *szöggel való elforgatottjaként. Ezt a konstrukciót elvégezve a* $\vec{b}, \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}$ *vektorháromszögre, kapjuk a kívánt összefüggést.*

A vektoriális szorzat geometriai értelme

Állítás

Minden $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ esetén az általuk kifeszített parallelogramma T területe megegyezik $|\vec{a} \times \vec{b}|$-vel.

Bizonyítás

Egy parallelogramma területe megegyezik alapja és hozzá tartozó magassága szorzatával. Válasszuk például $\vec{a}$-t alapnak. Ekkor a hozzá tartozó magasság éppen $|\vec{b}| \sin(\varphi)$.

A standard bázis vektorainak egymással vett vektoriális szorzata

Legyen

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0} \\ \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} &= \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} &= \vec{j}. \end{aligned}$$

A vektoriális szorzat képlete koordinátákban

Legyen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Állítás

Ekkor:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás

Használjuk a linearitást és a standard bázis vektorainak ismert szorzatait:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (-a_1 b_3 + a_3 b_1)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}.$$

Síkbeli háromszög területe

Legyenek most $A, B, C \in \mathbf{R}^2$, amelyek $\vec{i}, \vec{j}$-re vonatkozó koordinátái rendre

$$A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Állítás

Ekkor az ABC hármoszög területe

$$\frac{1}{2}\left|(b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1)\right|.$$

Síkbeli háromszög területképletének bizonyítása

Bizonyítás

Ágyazzuk be a síkot $\mathbf{R}^3$*-ba úgy, hogy* (x, y)*-hoz az* $(x, y, 0)$ *pontot rendeljük. Ekkor*

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

és

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1) \end{pmatrix}.$$

Mivel e vektor hossza az ABC *háromszög területének kétszerese, kapjuk az állítást.*

Vektorok vegyes szorzata

Legyenek $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$.

Definíció

Ekkor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *vegyes szorzata a*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \in \mathbf{R}$$

skalár.

Feltétel vektorok vegyes szorzatának eltűnésére

Állítás

Az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok vegyes szorzata akkor és csak akkor 0*, ha $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ egysíkúak.*

Bizonyítás

Amennyiben a három vektor valamelyike $\vec{0}$, akkor mindkét feltétel nyilvánvalóan teljesül. Általánosabban, amennyiben $\vec{a}, \vec{b}$ egymással párhuzamosak, akkor egyrészt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ miatt minden $\vec{c}$ esetén $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, másrészt $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ egysíkúak. Ezért feltehetjük hogy $\vec{a}, \vec{b}$ nem párhuzamosak egymással (többek között egyikük sem $\vec{0}$). Az $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ vektor merőleges mind $\vec{a}$-ra, mind $\vec{b}$-re, ezért a $\vec{a} \times \vec{b}$-ra merőleges vektorok által alkotott sík pontosan az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ által kifeszített sík. A $\vec{c}$ vektor tehát akkor és csak akkor merőleges $\vec{a} \times \vec{b}$-ra, ha egysíkú $\vec{a}, \vec{b}$-vel.

A vegyes szorzat anti-szimmetriája és linearitása

Állítás

A vegyes szorzat mindhárom változóban lineáris: bármely $\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \vec{c}, \vec{c}' \in \mathbf{R}^3$ *és* $\alpha \in \mathbf{R}$ *esetén*

$$(\alpha \cdot \vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\alpha \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\alpha \cdot \vec{c}) = \alpha\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{a}')\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}'\vec{b}\vec{c}$$

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{b}')\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}'\vec{c}$$

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{c}') = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{c}'.$$

A vegyes szorzat ellentettjére változik, ha $\vec{a}$*-t és* $\vec{b}$*-t felcseréljük:*

$$\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Bizonyítás

Azonnal következnek a skaláris és vektoriális szorzat linearitásából valamint a vektoriális szorzat ferde kommutativitásából.

A vegyes szorzat geometriai értelme

Legyenek $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ általános helyzetű (azaz, nem egysíkú) vektorok, amelyek kifeszítenek egy nemelfajuló P paralelepipedont.

Állítás

Ekkor P térfogata

$$V(P) = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c},$$

ahol az előjel $+$ amennyiben $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak, és $-$ amennyiben balsodrásút.

A vegyes szorzat geometriai értelmének bizonyítása

Bizonyítás

A $V(P)$ térfogatot megkaphatjuk az $\vec{a}, \vec{b}$ által kifeszített parallelogramma területének és a hozzá tartozó m magasság szorzataként. Mivel előbbi terület éppen $|\vec{a} \times \vec{b}|$, utóbbi magasság pedig $m = |\vec{c}| \cos(\varphi)$, ahol φ az $\vec{a} \times \vec{b}$ és $\vec{c}$ által közbezárt szög, így a skalár-szorzat definíciójából kapjuk a

$$V(P) = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos(\varphi) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

képletet, amennyiben $\cos(\varphi) > 0$, és a

$$V(P) = -|\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos(\varphi) = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

képletet, amennyiben $\cos(\varphi) < 0$. Könnyen látható, hogy az első eset éppen azzal ekvivalens, hogy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jobbsodrású rendszer.

Felcserélési tétel

Állítás

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ *esetén*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

Bizonyítás

Mindhárom mennyiség abszolút értéke ugyanazon P *paralelepipedon* $V(P)$ *térfogata, és az* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *rendszer akkor és csak akkor jobbsodrású, ha a* $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ *rendszer az.*

A fent kimondott tulajdonságot úgy is fogalmazhatjuk, hogy a vegyes szorzat invariáns a benne szereplő vektorok ciklikus permutációira:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mapsto (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}).$$

A vegyes szorzat képlete koordinátákban

Legyen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Állítás

Ekkor:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.$$

Bizonyítás

Azonnal következik a skaláris és vektoriális szorzat koordinátákban megadott képletéből.

Megjegyzés

Ezzel a képlettel adott mennyiséget az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ oszlopvektorok által meghatározott 3×3 méretű determinánsnak hívjuk.

A kifejtési tétel

Állítás

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \cdot \vec{a}.$$

Bizonyítás

A skaláris és vektoriális szorzat linearitása miatt elegendő leellenőrizni a képletet azokban az esetekben, amikor a szóban forgó vektorok mindegyike az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ standard bázis valamelyik vektora. Ezek az esetek egyenként végignézhetők. Például:

$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} = \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle \cdot \vec{j} - \langle \vec{j}, \vec{j} \rangle \cdot \vec{i},$$
$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} = \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle \cdot \vec{j} - \langle \vec{j}, \vec{k} \rangle \cdot \vec{i}.$$

Jacobi-azonosság

Állítás

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Bizonyítás

A kifejtési tétel miatt

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \cdot \vec{a} \\
(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} &= \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{c} - \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{b} \\
(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} &= \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle \cdot \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \cdot \vec{c}.
\end{aligned}$$

Összeadva a jobb oldalakat, és felhasználva a skalár-szorzat szimmetriáját, minden tag kiesik.

Lagrange-azonosság

Állítás

Minden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbf{R}^3$ *esetén*

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle.$$

Speciálisan, ha $\vec{c} = \vec{a}$ *és* $\vec{b} = \vec{d}$, *akkor*

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2.$$

Bizonyítás

Alkalmazva a felcserélési majd kifejtési tételeket:

$$\begin{aligned}\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d}) \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \vec{c} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{d} \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle.\end{aligned}$$