19. előadás: Síkbeli koordináta-geometria

Szabó Szilárd

Egyenes iránytényezős egyenlete

A mai előadáson a Descartes-féle koordináta-rendszerrel ellátott euklideszi síkkal foglalkozunk.
Legyen e egy egyenes, amely nem párhuzamos az y-tengellyel. Ekkor, e egy $B(0, b)$ pontban metszi az y-tengelyt. Legyen továbbá e meredeksége $m \in \mathbf{R}$: amint x értékét 1-gyel növeljük, a felette e-n fekvő pont ordinátája m-mel növekedjék. Ekkor e egyenlete:

$$y = mx + b.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$e = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \quad y = mx + b\}.$$

Egyenes megadása két pontjával

Legyenek $P_1(x_1, y_1) \neq P_2(x_2, y_2)$ pontok. Amennyiben $x_1 \neq x_2$, akkor az egyetlen olyan egyenes egyenlete, amely illeszkedik P_1-re és P_2-re:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Amennyiben $x_1 = x_2$, akkor az egyenes egyenlete

$$x = x_1.$$

Összefoglalva a két esetet, az egyenlet

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0.$$

Vegyük észre, hogy bal-oldali kifejezés egy 2×2-es determináns:

$$-\det\begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Egyenes megadása tengelymetszetekkel

Speciálisan, az egyetlen olyan egyenes egyenlete, amely az abszcissza-tengelyt az $A(a,0) \neq (0,0)$ pontban, az ordináta-tengelyt pedig a $B(0,b) \neq (0,0)$ pontban metszi:

$$y = -\frac{b}{a}x + b.$$

Átalakítás után:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Egyenes irányvektora

Legyen e egy egyenes. Azt mondjuk, hogy e egy irányvektora bármely olyan $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektor, amelyet e két különböző $P_1 \neq P_2$ pontja határoz meg:

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_2}.$$

Egy adott egyenes irányvektorai párhuzamosak egymással.

Egyenes paraméteres vektoregyenlete

Legyen e egy egyenes, $\vec{v}$ egy irányvektora és P_1 egy pontja. Jelöljük $\vec{p}_1$-gyel a P_1-be mutató vektort és $\vec{p}$-vel egy határozatlan P pontba mutató vektort. Ekkor a P pont pontosan akkor van rajta e-n, ha

$$\vec{p} - \vec{p}_1 = t\vec{v}$$

valamely $t \in \mathbf{R}$ esetén. Átalakítva:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{v}.$$

Ez e paraméteres vektoregyenlete.

Egyenes paraméteres egyenletrendszere

Legyen az előző lap jelölésein túl $P_1(x_1, y_1), P(x, y)$ és $\vec{v} = (a, b)$.
Írjuk most ki e paraméteres vektoregyenletét koordinátánként:

$$x = x_1 + at$$
$$y = y_1 + bt$$

valamely $t \in \mathbf{R}$ esetén. Ez e paraméteres egyenletrendszere.

Egyenes egyenletrendszere

Küszöböljük most ki a t paramétert e paraméteres egyenletrendszeréből:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}.$$

Ez e (paramétermentes) egyenletrendszere. Amennyiben $a = 0$ (illetve $b = 0$), akkor a paramétermentes egyenletrendszer

$$x = x_1 \quad (\text{illetve } y = y_1).$$

Irányszög

Legyen $\vec{v}$ egy e egyenes irányvektora, és tegyük fel, hogy $|\vec{v}| = 1$:

$$\vec{v} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

valamely $\alpha \in \mathbf{R}$ ún. irányszög esetén.

Állítás

Egy egyenes irányszögének tangense az egyenes meredeksége.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $\cos(\alpha) \neq 0 \neq \sin(\alpha)$. *Ekkor* e *egyenletrendszere:*

$$\frac{x - x_1}{\cos(\alpha)} = \frac{y - y_1}{\sin(\alpha)}.$$

Ezt átalakítva:

$$y = \tan(\alpha)x + (y_1 - \tan(\alpha)x_1)$$

visszakapjuk az iránytényezős egyenletet.

Egyenes normálvektora

Legyen e egy egyenes. Azt mondjuk, hogy e egy normálvektora bármely olyan $\vec{n} \neq \vec{0}$ vektor, amely merőleges e valamely (vagy ekvivalens módon, minden) $\vec{v}$ irányvektorával. Bármely két normálvektora e-nek párhuzamos egymással. Alkalmazásokban hasznos lesz egy 1-hosszú $\vec{n}_0$ normálvektort választani, amely előjel erejéig egyértelműen meghatározott.
Legyen e-nek $\vec{v} = (a, b)$ egy irányvektora és $\vec{n} = (A, B)$ egy normálvektora. Ekkor a merőlegességi feltétel:

$$aA + bB = \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0.$$

Látjuk, hogy $\vec{n} = (-b, a)$ teljesíti ezt az egyenletet. Innen:

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Egyenes vektoregyenlete

Legyen P_1 egy pont és $\vec{n} \neq \vec{0}$. Ekkor, az egyetlen olyan egyenes egyenlete, amely illeszkedik P_1-re és egy normálvektora $\vec{n}$:

$$\langle \vec{p} - \vec{p}_1, \vec{n} \rangle = 0.$$

Ez e vektoregyenlete.

Egyenes általános egyenlete

Legyen az előző lap jelölésein túl $P_1(x_1, y_1), P(x, y)$ és $\vec{n} = (A, B)$. Ekkor a vektoregyenlet

$$\langle (x - x_1, y - y_1), \vec{n} \rangle = 0,$$

azaz átalakítva:

$$Ax + By - (Ax_1 + By_1) = 0.$$

Gyakran bevezetjük a $C = -(Ax_1 + By_1)$ jelölést, amivel e általános egyenlete:

$$Ax + By + C = 0.$$

Normálegyenlet, pont és egyenes távolsága

Legyen e az

$$Ax + By + C = 0$$

általános egyenletű egyenes. Amennyiben teljesül

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2} = 1,$$

akkor azt mondjuk hogy ez e normálegyenlete.
Legyen $P(x, y)$ tetszőleges pont a síkon. Láttuk, hogy ekkor a $\langle \overrightarrow{P_1P}, \vec{n} \rangle$ skalár-szorzat előjel erejéig éppen a $\overrightarrow{P_1P}$ vektor $\vec{n} = (A, B)$-re való vetületének hosszát adja.

Állítás

Ha e normálegyenlete $Ax + By + C = 0$, akkor $P(x, y)$ távolsága az e egyenestől:

$$d(P, e) = |Ax + By + C|.$$