20. előadás: Térbeli koordináta-geometria

Szabó Szilárd

Egyenes irányvektora

A mai előadáson a Descartes-féle koordináta-rendszerrel ellátott euklideszi térrel foglalkozunk.

Legyen e egy egyenes. Azt mondjuk, hogy e egy irányvektora bármely olyan $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektor, amelyet e két különböző $P_1 \neq P_2$ pontja határoz meg:

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_2}.$$

Egy adott egyenes irányvektorai párhuzamosak egymással.

Egyenes paraméteres vektoregyenlete

Legyen e egy egyenes, $\vec{v}$ egy irányvektora és P_1 egy pontja. Jelöljük $\vec{p}_1$-gyel a P_1-be mutató vektort és $\vec{p}$-vel egy határozatlan P pontba mutató vektort. Ekkor a P pont pontosan akkor van rajta e-n, ha

$$\vec{p} - \vec{p}_1 = t\vec{v}$$

valamely $t \in \mathbf{R}$ esetén. Átalakítva:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + t\vec{v}.$$

Ez e paraméteres vektoregyenlete.

Egyenes paraméteres egyenletrendszere

Legyen az előző lap jelölésein túl $P_1(x_1, y_1, z_1), P(x, y, z)$ és $\vec{v} = (a, b, c)$. Írjuk most ki e paraméteres vektoregyenletét koordinátánként:

$$x = x_1 + at$$
$$y = y_1 + bt$$
$$z = z_1 + ct$$

valamely $t \in \mathbf{R}$ esetén. Ez e paraméteres egyenletrendszere.

Egyenes egyenletrendszere

Küszöböljük most ki a t paramétert e paraméteres egyenletrendszeréből:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

Ez e (paramétermentes) egyenletrendszere. Amennyiben $a = 0$ (illetve $b = 0$ vagy $c = 0$), akkor a paramétermentes egyenletrendszerben a megfelelő tag nem szerepel, helyette szerepel

$$x = x_1 \quad \text{(illetve } y = y_1 \text{ vagy } z = z_1\text{)}.$$

Sík paraméteres vektoregyenlete

Legyen most S egy sík a térben.

Definíció

S irányvektorainak egy független rendszere két olyan $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ vektor, amelyek párhuzamosak S-sel és lineárisan függetlenek (azaz egyik sem többszöröse a másiknak).

Ekkor a P pont pontosan akkor van rajta S-en, ha

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$$

valamely $t, s \in \mathbf{R}$ esetén. Ez S paraméteres vektoregyenlete.

Sík normálvektora

Legyen S egy sík a térben.

Definíció

Azt mondjuk, hogy S egy normálvektora *bármely olyan $\vec{n} \neq \vec{0}$ vektor, amely merőleges minden S-sel párhuzamos $\vec{v}$ vektorra.*

Egy adott S sík bármely két normálvektora párhuzamos egymással. Alkalmazásokban hasznos lesz egy 1-hosszú $\vec{n}_0$ normálvektort választani, amely előjel erejéig egyértelműen meghatározott:

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}.$$

Állítás

Legyen $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ az S irányvektorainak egy független rendszere. Ekkor

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

normálvektora S-nek.

Sík vektoregyenlete

Legyen P_1 egy pont és $\vec{n} \neq \vec{0}$. Ekkor, az egyetlen olyan sík egyenlete, amely illeszkedik P_1-re és egy normálvektora $\vec{n}$:

$$\langle \vec{p} - \vec{p}_1, \vec{n} \rangle = 0.$$

Ez S vektoregyenlete.

Sík általános egyenlete

Legyen az előző lap jelölésein túl $P_1(x_1, y_1, z_1), P(x, y, z)$ és $\vec{n} = (A, B, C)$. Ekkor a vektoregyenlet

$$\langle (x - x_1, y - y_1, z - z_1), \vec{n} \rangle = 0,$$

azaz átalakítva:

$$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0.$$

Gyakran bevezetjük a $D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$ jelölést, amivel S általános egyenlete:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Normálegyenlet, pont és sík távolsága

Legyen S az

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

általános egyenletű sík. Amennyiben teljesül

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 1,$$

akkor azt mondjuk hogy ez S egy normálegyenlete.
Legyen $P(x, y, z)$ tetszőleges pont a térben. Láttuk, hogy ekkor a $\langle \overrightarrow{P_1P}, \vec{n} \rangle$ skalár-szorzat előjel erejéig éppen a $\overrightarrow{P_1P}$ vektor $\vec{n} = (A, B, C)$-re való vetületének előjeles hosszát adja.

Állítás

Ha S normálegyenlete $Ax + By + Cz + D = 0$, akkor $P(x, y, z)$ távolsága az S síktól:

$$d(P, S) = |Ax + By + Cz + D|.$$