1. Zárthelyi megoldások

A1 VBK

2018 március 20.

Minden feladat hibátlan megoldása 4 pontot ér.

1. Feladat Mutassa meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$1 - 4 + 9 - 16 + \cdots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Feladat Legyen

$$z = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}.$$

Határozza meg z^{2018}-t!

Mego.:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

emiatt $z^8 = 1$, és

$$z^{2018} = z^{2016} z^2 = z^2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}.$$

3. Feladat Konvergens-e a

$$a_n = \frac{n^8 + 5^n - 1}{n^2(-2)^n + 2n^9}$$

sorozat? Amennyiben igen, állapítsa meg a határértékét!

Mego.:

$$a_n = \left(-\frac{5}{2}\right)^n \frac{1 + n^8 5^{-n} - 5^{-n}}{n^2 + 2n^9(-2)^{-n}}$$

és $|a_n| \to \infty$ váltakozó előjelekkel, tehát a határérték nem létezik.

4. Feladat Határozza meg az alábbi sor összegét!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n-1} - (-3)^{n+1}}{2^{3n}} = ?$$

Mego.:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n-1} - (-3)^{n+1}}{2^{3n}} &= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{8}\right)^n \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{8}{3} + 3\cdot\frac{8}{11} = \frac{448}{165}.\end{aligned}$$

5. Feladat Döntse el, hogy létezik-e az alábbi határérték!

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{(x-1)^2}.$$

Amennyiben létezik, állapítsa meg az értékét!
Mego.:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{(x-1)^2} &= \frac{x+1-2}{(x-1)^2(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}. \end{aligned}$$

Nem létezik, mert a nevező 0-ba tart míg a számláló nem. Másodfajú szakadási pont.