2. Zárthelyi — Megoldások

A1 VBK

2018 május 8.

1. Feladat Írja fel az

$$y = x^3 - 2x + 1$$

görbe azon normál-egyeneseinek egyenletét, amelyek párhuzamosak az $y = \frac{x}{2} - 1$ egyenessel!

Mego.: Mivel $y'(x) = 3x^2 - 2$ és az x_0 pontba húzott normál-egyenes meredeksége $-1/y'(x)$, azért meg kell oldanunk a

$$-\frac{1}{3x_0^2 - 2} = \frac{1}{2}$$

egyenletet. Átrendezés után a megoldás $x_0 = 0$, és a keresett normál-egyenes egyenlete

$$y = \frac{x}{2} + 1.$$

2. Feladat Tekintsünk egy 1 sugarú félkörlapot, és az összes olyan téglalapot, amelynek egyik oldala a félkörlap átmérőjén fekszik szimmetrikusan a kör középpontjára, másik két csúcsa pedig a félköríven. Határozza meg a legnagyobb területű ilyen téglalap területét.

Mego.: Jelöljük $2x$-szel az átmérőn fekvő alaplap hosszát, ahol $x \in [0, 1]$. Ekkor a Pithagorasz-tétel miatt a másik oldal hossza

$$y = \sqrt{1 - x^2},$$

a terület tehát

$$T(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

Ennek deriváltja

$$T'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}(1 - 2x^2),$$

amelynek zérushelye $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mivel T globális maximuma nem lehet az értelmezési tartomány végpontjaiban (hiszen azok globális minimumok), másrészt Bolzano tétele miatt létezik globális maximum, T differenciálhatóságából következik hogy az $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ kritikus pont a globális maximum.

3. Feladat Végezze el az

$$f(x) = e^{-x^2 + x}$$

függvény teljes vizsgálatát!

Mego.: $D_f = \mathbb{R}$, nincs paritása, nincs periódusa. A teljes $\mathbb{R}$-en pozitív értékű. Mindkét végtelenbeli határértéke 0. Mivel

$$f'(x) = (-2x + 1)e^{-x^2 + x},$$

azért f szigorúan monoton növekszik $] - \infty, \frac{1}{2}]$-en és szigorúan monoton csökken $[\frac{1}{2}, -\infty[$-n, $\frac{1}{2}$-ben globális maximuma van. Mivel

$$f''(x) = [(-2x + 1)^2 - 2]e^{-x^2 + x},$$

azért a konvexitáshoz a

$$4x^2 - 4x + 1$$

zérushelyeit és előjelét kell vizsgálnunk. A zérushelyek

$$x_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A két zérushely között $f'' > 0$, különben $f'' < 0$. Tehát, f-nek inflexiós pontja van az $x_\pm$ pontokban, f konvex a

$$\left]-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad \text{és} \quad \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right[$$

intervallumokon, és konkáv a

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

intervallumon.

4. Feladat Határozza meg a következő határozatlan integrált!

$$\int \frac{2x^2 - 1}{x(x-1)^2} \mathrm{d}x$$

Mego.: Az integrandus racionális törtfüggvény, a számlaló foka kisebb a nevezőénél. Részlettört alakja

$$\frac{2x^2 - 1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

A határozatlan együtthatók módszere az

$$a = -1, \quad b = 3, \quad c = 1$$

értékeket adja. Az integrál

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - 1}{x(x-1)^2} \mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x + 3 \int \frac{1}{x-1} \mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2} \mathrm{d}x \\ &= \ln|x| + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c.\end{aligned}$$

5. Feladat Számolja ki a $\sin(x)$ és $\cos(x)$ függvények $[0, 2\pi]$ feletti darabjai közé eső korlátos síktartomány területét!

Mego.: Határozzuk meg először a görbék metszéspontjait:

$$\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}.$$

A $[0, \frac{\pi}{4}]$ és $[\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$ intervallumokon $\cos(x) \geq \sin(x)$, míg a $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ intervallumon $\cos(x) \leq \sin(x)$. A két görbe közötti területet tehát a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \sin(x)) \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin(x) - \cos(x)) \mathrm{d}x + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos(x) - \sin(x)) \mathrm{d}x$$

összeg adja meg. Ennek értéke

$$[\sin(x) + \cos(x)]_{x=0}^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos(x) - \sin(x)]_{x=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + [\sin(x) + \cos(x)]_{x=\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} = 8\sqrt{2} - 2.$$