

## Hausaufgaben 12.

Bestimmte und uneigentliche Integrale

Berechnen Sie den Flächeninhalt

1. zwischen  $y = 4 - x^2$  und der  $x$ -Achse. ( $\frac{32}{3}$ )

2. zwischen den Kurven  $y = x(x - 1)$  und  $y = 3x$ . ( $\frac{32}{3}$ )

3. zwischen den Kurven  $y = x^4$  und  $y = 3x^2 - 2$ ,  $(-1 \leq x \leq 1)$ . ( $\frac{24-8\sqrt{2}}{5}$ )

4. zwischen  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$  und  $x = 1$ . (2(ch1 - 1))

5. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Kurve

$$x = t^2, \quad y = (1 - t)^2, \quad t \in [0, 1]$$

und der  $x$  Achse.

(1/6)

6. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Kreisevolvente

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

und der  $x$  Achse.

( $-a^2\pi(\pi^2 - 12)/48$ )

Berechnen Sie die Koordinaten des geometrischen Schwerpunktes der folgenden ebenen Bereiche, die durch die begrenzenden Kurven bestimmt sind

7.  $y = x^3$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  ( $S(\frac{4}{5}, \frac{2}{7})$ )

8.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$  ( $S(\frac{3}{\ln 4}, \frac{3}{8\ln 4})$ )

9.  $y^2 = x$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$  ( $S(\frac{12}{5}, \frac{3}{4})$ )

10.  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  Halbkreis ( $S(0, \frac{4r}{3\pi})$ )

Berechnen Sie die Bogenlänge von  $f(x)$  zwischen  $a \leq x \leq b$

11.  $f(x) = \ln(1 - x^2)$ ,  $0 \leq x \leq 0.5$  ( $\int_0^{0.5} (-1 + \frac{2}{1-x^2}) dx = -0.5 + 2\text{arth}0.5$ )

12.  $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ ,  $1 \leq x \leq 2$  ( $\frac{1}{2} \int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^2}) dx = \frac{17}{12}$ )

Berechnen Sie das Volumen der Rotationskörper, die durch Rotieren um die  $x$ -Achse der Funktion  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  entstehen:

$$13. f(x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \left(\frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$14. f(x) = \operatorname{tg} 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{8} \quad \left(\pi \frac{4-\pi}{8}\right)$$

$$15. f(x) = \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2 \quad (2\pi(\ln 2 - 1)^2)$$

$$16. f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad 0 \leq x \leq 2 \quad \left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Mantelfläche der Rotationskörper, die durch Rotieren um die  $x$ -Achse der Funktion  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  entstehen:

$$17. y = \operatorname{ch} x, \quad -2 \leq x \leq 2 \quad (\pi \operatorname{sh} 4 + 4\pi)$$

$$18. y = \sqrt{25 - x^2}, \quad -5 \leq x \leq 5 \quad (100\pi)$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren, wenn ja, berechnen Sie ihren Wert:

$$1. \int_0^6 \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6-x}} dx \quad (24) \qquad 2. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \quad (3)$$

$$3. \int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x} \quad (1) \qquad 4. \int_3^\infty \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} \quad (\ln 2)$$

$$5. \int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} dx \quad \text{nicht konvergent} \qquad 6. \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx \quad (4)$$