1. Pót-Zárthelyi megoldások

Matematika M1 terméktervezőknek

2018 november 28.

Minden feladat hibátlan megoldása 5 pontot ér.

1. Feladat Egy bajnokságban három csapat versenyez egymással: A, B és C. Egy fogadóiroda szerint annak a valószínűsége, hogy A (illetve B) nyeri meg a bajnokságot, rendre: $0,4$ (illetve $0,3$). Amennyiben A nyer, akkor annak a valószínűsége, hogy B lesz a második: $0,7$. Végül, B nyerése esetén az A csapat $0,9$ valószínűséggel lesz második. Tudjuk, hogy C lett a második. Mekkora a valószínűsége, hogy A az első?

Mego.: Jelölje A_1 (illetve B_1, C_1) rendre azt az eseményt, hogy az A (illetve B, C) csapat végez az első helyen. Ismert:

$$P(A_1) = 0,4$$
$$P(B_1) = 0,3$$

Továbbá, jelölje A_2, B_2 illetve C_2 rendre azt az eseményt, hogy az A, B illetve C csapat végez a második helyen. Ismert:

$$P(B_2|A_1) = 0,7$$
$$P(C_2|A_1) = 0,3$$
$$P(A_2|B_1) = 0,9$$
$$P(C_2|B_1) = 0,1.$$

Alkalmazzuk Bayes tételét a C_2 eseményre és A_1, B_1, C_1 teljes eseményrendszerre. Figyelembe véve a nyilvánvaló $P(C_2|C_1) = 0$ egyenlőséget, a keresett mennyiség ez alapján:

$$P(A_1|C_2) = \frac{P(C_2|A_1)P(A_1)}{P(C_2|A_1)P(A_1) + P(C_2|B_1)P(B_1)}$$
$$= \frac{0,3 \cdot 0,4}{0,3 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,3} = 0,8.$$

2. Feladat Egy zsákban van 11 golyó, mindegyiken a $0, \ldots, 10$ szám egyikével. Visszatevés nélkül kihúzunk közülük kettőt. Jelöljük ξ_1, ξ_2-vel a kihúzott két számot, és legyen

$$\xi = \min(|\xi_1 - 5|, |\xi_2 - 5|)$$

Határozzuk meg ξ várható értékét és szórását!

Mego.: Az eseménytér a $0, \ldots, 10$ ismétlés nélküli másodrendű kombinációinak Ω halmaza,

$$|\Omega| = \binom{11}{2} = 55.$$

Legyen $A_j = \{\xi = j\}$. Ekkor

$$A_0 = \{\xi_1 = 5\} \cup \{\xi_2 = 5\},$$

ahonnan $|A_0| = 10$. Továbbá,

$$A_1 = \{(4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (4,6), (4,7), (4,8), (4,9), (4,10)\}$$
$$\cup \{(6,0), (6,1), (6,2), (6,3), (6,7), (6,8), (6,9), (6,10)\}$$

(mivel a sorrend nem számít azért $(6,4) = (4,6)$ amit már az első sorban számoltunk), ahonnan $|A_1| = 17$. Hasonlóan belátható, hogy

$$|A_2| = 13, \quad |A_3| = 9, \quad |A_4| = 5, \quad |A_5| = 1.$$

Innen:

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \frac{1}{55}(0 \cdot 10 + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1) \\ &= \frac{95}{55} = \frac{19}{11} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \frac{1}{55}(0 \cdot 10 + 1 \cdot 17 + 4 \cdot 13 + 9 \cdot 9 + 16 \cdot 5 + 25 \cdot 1) \\ &= \frac{255}{55} = \frac{51}{11}, \end{aligned}$$

végül

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \sqrt{E(\xi^2) - E(\xi)^2} \\ &= \sqrt{\frac{561 - 361}{121}} \\ &= \sqrt{\frac{200}{121}} \\ &= \sqrt{2}\frac{10}{11}. \end{aligned}$$

3. Feladat A $[0,2]$ intervallumon egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint kiválasztunk két pontot: először x-et, azután y-t. Mi a valószínűsége, hogy $x < y^2$?

Mego.: Az eseménytér az $\Omega = [0,2] \times [0,2]$ négyzet, amelynek területe $T(\Omega) = 4$. Az $x < y^2$ egyenlőtlenséget teljesítő (x,y) pontok az $y = \sqrt{x}$ parabola felett helyezkednek el. A megfelelő A tartomány komplementerének a területe:

$$T(\bar{A}) = \int_0^2 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{x=0}^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Innen, a keresett valószínűség:

$$P(x < y^2) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

4. Feladat Egy szabályos pénzérmét feldobunk egymás után 10000-szer. Mi a valószínűsége, hogy a Fejek száma 4980 és 5050 közé esik?

Mego.: Legyen $\xi_j = 1$ ha a j-edik dobás kimenetele Fej, és $\xi_j = 0$ ha Írás. Ez egy egyszerű alternatíva $p = 0,5$ valószínűséggel, amelyre tehát

$$E(\xi_j) = \frac{1}{2}, \quad D(\xi_j) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

A centrális határeloszlás tétele miatt tehát

$$\eta = \frac{\sum_{j=1}^{10000} \xi_j - \frac{1}{2} \cdot 10000}{\frac{1}{2}\sqrt{10000}} = \frac{\sum_{j=1}^{10000} \xi_j - 5000}{50}$$

standard normális eloszlású változóval közelíthető. Az

$$\sum_{j=1}^{10000} \xi_j \in [4980, 5050]$$

esemény megegyezik a

$$\eta \in \left[-\frac{2}{5}, 1\right]$$

eseménnyel. A keresett valószínűség tehát

$$\begin{aligned} P\left(\eta \in \left[-\frac{2}{5}, 1\right]\right) &= \Phi(1) - \Phi(-0,4) \\ &= \Phi(1) + \Phi(0,4) - 1 \\ &= 0,8413 + 0,6554 - 1 = 0,4967. \end{aligned}$$