2. Pót-Zárthelyi megoldások

Matematika M1terméktervezőknek

2018 november 28.

Minden feladat hibátlan megoldása 5 pontot ér.

1. Feladat Végezzük el a szukcesszív approximáció első két lépését (y_1, y_2) a következő kezdeti-érték feladathoz!

$$y'(x) = -\sin(x) + y^2, \quad y(0) = 1.$$

Mego.: Parciális integrálással:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x \left(-\sin(t) + 1^2\right) \mathrm{d}t = 1 + [\cos(t) + t]_{t=0}^x = \cos(x) + x, \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x \left(-\sin(t) + (\cos(t) + t)^2\right) \mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_0^x \left(-\sin(t) + \cos^2(t) + 2t\cos(t) + t^2\right) \mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_0^x \left(-\sin(t) + \frac{1+\cos(2t)}{2} + 2t\cos(t) + t^2\right) \mathrm{d}t \\
&= 1 + \left[\cos(t) + \frac{2t + \sin(2t)}{4} + 2t\sin(t) + 2\cos(t) + \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^x \\
&= -2 + 3\cos(x) + \frac{2x + \sin(2x)}{4} + 2x\sin(x) + \frac{x^3}{3}
\end{aligned}$$

2. Feladat Oldja meg a következő kezdeti-érték feladatot!

$$y'(x) = \ln(x)y(x) + x^x, \quad y(1) = 0$$

Mego.: Lineáris inhomogén egyenlet, értelmezési tartománya $x > 0$. A hozzárendelt homogén lineáris egyenlet:

$$Y'(x) = \ln(x)Y(x),$$

átrendezve és mindkét oldalát integrálva

$$\ln|Y(x)| = \int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + c,$$

valamely $c \in \mathbb{R}$ értékre, ahonnan mindkét oldalt e hatványára emelve

$$Y(x) = Ce^{x\ln(x) - x} = Cx^x e^{-x}$$

(ahol $C = \pm e^c \in \mathbb{R}$). Változtassuk a C állandót $C \rightsquigarrow C(x)$:

$$y(x) = C(x)x^x e^{-x},$$

ahol $C(x)$ teljesíti a

$$C'(x)x^x e^{-x} = x^x$$

egyenletet. Ebből nyerjük a

$$C(x) = e^x + C$$

alakot, ahol $C \in \mathbb{R}$. Az egyenlet általános megoldása tehát

$$y(x) = C(x)x^x e^{-x} = (e^x + C)x^x e^{-x} = x^x(1 + Ce^{-x}).$$

Végül, az $y(1) = 0$ feltétel szerint

$$0 = 1^1 + C1^1 e^{-1},$$

azaz $C = -e$. A keresett partikuláris megoldás:

$$y(x) = x^x(1 - e^{1-x}).$$

3. Feladat Mely negyedrendű állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciál-egyenlet partikuláris megoldása az alábbi függvény?

$$x^2 + e^x \cos(x) - 2e^x \sin(x) + 3e^{-x}$$

Mego.: Az $e^x \cos(x), -2e^x \sin(x)$ tagokhoz tartozó gyökök $1 \pm i$, tehát a karakterisztikus polinomot osztja

$$(s - 1 - i)(s - 1 + i) = s^2 - 2s + 2.$$

Az x^2 taghoz tartozó gyök 0, tehát a karakterisztikus polinomot osztja s. Végül, a $3e^{-x}$ taghoz tartozó gyök -1, tehát a karakterisztikus polinomot osztja $s + 1$. Innen a karakterisztikus polinom alakja

$$s(s + 1)(s^2 - 2s + 2) = s^4 - s^3 + 2s,$$

azaz a keresett egyenlethez rendelt homogén lineáris differenciál-egyenlet alakja

$$y^{(4)} - y^{(3)} + 2y' = 0.$$

Az x^2 tag azt mutatja, hogy külső rezonancia van, azaz az inhomogén egyenlet jobb-oldalán x valamely elsőfokú polinoma áll. Ennek meghatározása az x^2 tagnak a homogén egyenletbe helyettesítésével történik:

$$(x^2)^{(4)} - (x^2)^{(3)} + 2(x^2)' = 0 - 0 + 4x.$$

A többi tag megoldja a homogén egyenletet, ezért a keresett inhomogén egyenlet:

$$y^{(4)} - y^{(3)} + 2y' = 4x.$$

4. Feladat Keresse meg Laplace-transzformáció segítségével a következő kezdeti-érték feladat megoldását!

$$y'''(x) - y'(x) = -xe^x, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1.$$

Mego.: Felhasználva a kezdeti-értékeket, az egyenlet Laplace-transzformáltja:

$$(s^3 Y(s) + s^2 - 1) - (sY(s) + 1) = -\frac{1}{(s-1)^2}.$$

Átrendezéssel kapjuk:

$$(s^3 - s)Y(s) = -s^2 + 2 + \frac{1}{(s-1)^2} = \frac{-s^4 + 2s^3 + s^2 - 4s + 1}{(s-1)^2}$$

azaz leosztva $(s^3 - s)$ tényezővel

$$Y(s) = \frac{-s^4 + 2s^3 + s^2 - 4s + 1}{s(s+1)(s-1)^3}.$$

A jobb oldalon álló racionális törtfüggvény részlettört-alakja:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2} + \frac{E}{(s-1)^3}.$$

Ennek megoldása

$$A = -1, \quad B = \frac{3}{8}, \quad C = -\frac{3}{8}, \quad D = \frac{3}{4}, \quad E = -\frac{1}{2},$$

és így

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{3}{8}\frac{1}{s+1} - \frac{3}{8}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{2}{(s-1)^3},$$

ahonnan inverz Laplace-transzformációval

$$y(x) = -1 + \frac{3}{8}e^{-x} - \frac{3}{8}e^{x} + \frac{3}{4}xe^{x} - \frac{1}{4}x^2e^{x}.$$