Matematika M1 vizsga megoldások

2018 december 19.

1. Feladat Egy $1m$ élhosszúságú, négyzet alakú céltáblára adunk le lövéseket. Feltesszük, hogy minden lövésünk eltalálja a táblát, és egyenletes eloszlást követ rajta. Amennyiben a lövés a tábla középpontjához $10cm$-nél közelebb esik, kapunk 10 pontot, amennyiben $10cm$-nél távolabb de $20cm$-nél közelebb esik, kapunk 9 pontot, s. í. t., amennyiben $50cm$-nél távolabb esik, kapunk 5 pontot. Számoljuk ki a kapott pontok várható értékét és szórását!

Mego.: Legyen ξ a kapott pont, és A_k az az esemény, hogy $\xi = k$. Ekkor:

$$\begin{aligned}
P(A_{10}) &= 0,1^2\pi = 0,0314 \\
P(A_9) &= (0,2^2 - 0,1^2)\pi = 0,0942 \\
P(A_8) &= (0,3^2 - 0,2^2)\pi = 0,1571 \\
P(A_7) &= (0,4^2 - 0,3^2)\pi = 0,22 \\
P(A_6) &= (0,5^2 - 0,4^2)\pi = 0,2827 \\
P(A_5) &= 1 - 0,5^2\pi = 0,2146.
\end{aligned}$$

Innen a várható érték

$$E(\xi) = 0,0314 \times 10 + 0,0942 \times 9 + 0,1571 \times 8 + 0,22 \times 7 + 0,2827 \times 6 + 0,2146 \times 5 = 6,7279.$$

Továbbá:

$$E(\xi^2) = 0,0314 \times 10^2 + 0,0942 \times 9^2 + 0,1571 \times 8^2 + 0,22 \times 7^2 + 0,2827 \times 6^2 + 0,2146 \times 5^2 = 47,1483,$$

ahonnan

$$D^2(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = 47,1483 - 6,7279^2 = 1,8836$$

és

$$D(\xi) = \sqrt{1,8836} = 1,3724.$$

2. Feladat Találja meg a következő kezdeti-érték feladat megoldását!

$$y'(x) + y^2(x) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Mego.: Az egyenletet átrendezve:

$$\frac{y'(x)}{1 - y^2(x)} = 1.$$

Ezt integrálva, és figyelembe véve hogy $y_0 = 0$, kapjuk:

$$\operatorname{artanh}(y(x)) = x,$$

azaz

$$y(x) = \tanh(x).$$

3. Feladat Keresse meg Laplace-transzformáció segítségével a következő kezdeti-érték feladat megoldását!

$$\begin{aligned} y' &= y + z \\ z' &= y - z \\ y(0) &= 1, \\ z(0) &= -1. \end{aligned}$$

Mego.: Az

$$y'(x)sY(s) - 1, \quad z'(x)sZ(s) + 1$$

azonosságok miatt a feladat ekvivalens a

$$\begin{aligned} (s-1)Y - Z &= 1 \\ -Y + (s+1)Z &= -1 \end{aligned}$$

rendszerrel. Ennek megoldása

$$Y(s) = \frac{s}{s^2-2}, \quad Z(s) = \frac{2-s}{s^2-2}.$$

Részlettört-alakban:

$$Y(s) = \frac{a}{s-\sqrt{2}} + \frac{b}{s+\sqrt{2}}, \quad Z(s) = \frac{c}{s-\sqrt{2}} + \frac{d}{s+\sqrt{2}}.$$

Az együtthatók meghatározása:

$$a = \frac{1}{2} = b, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}, \quad d = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}.$$

Inverz Laplace-transzformációval:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}x} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}x} \\ z(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)e^{\sqrt{2}x} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{2}x} \end{aligned}$$