1. Zárthelyi megoldások

Matematika M1 terméktervezőknek

2018 október 17.

Minden feladat hibátlan megoldása 5 pontot ér.

1. Feladat Egy bajnokságban három csapat versenyez egymással: A, B és C. Egy fogadóiroda szerint annak a valószínűsége, hogy A (illetve B) nyeri meg a bajnokságot, rendre: $0,5$ (illetve $0,35$). Amennyiben A nyer, akkor annak a valószínűsége, hogy B lesz a második: $0,6$. Végül, B nyerése esetén az A csapat $0,8$ valószínűséggel lesz második. Tudjuk, hogy C lett a második. Mekkora a valószínűsége, hogy A az első?

Mego.: Jelölje A_1 (illetve B_1, C_1) rendre azt az eseményt, hogy az A (illetve B, C) csapat végez az első helyen. Ismert:

$$P(A_1) = 0,5$$
$$P(B_1) = 0,35$$

Továbbá, jelölje A_2, B_2 illetve C_2 rendre azt az eseményt, hogy az A, B illetve C csapat végez a második helyen. Ismert:

$$P(B_2|A_1) = 0,6$$
$$P(C_2|A_1) = 0,4$$
$$P(A_2|B_1) = 0,8$$
$$P(C_2|B_1) = 0,2.$$

Alkalmazzuk Bayes tételét a C_2 eseményre és A_1, B_1, C_1 teljes eseményrendszerre. Figyelembe véve a nyilvánvaló $P(C_2|C_1) = 0$ egyenlőséget, a keresett mennyiség ez alapján:

$$\begin{aligned} P(A_1|C_2) &= \frac{P(C_2|A_1)P(A_1)}{P(C_2|A_1)P(A_1) + P(C_2|B_1)P(B_1)} \\ &= \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,4 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,35} = 0,74. \end{aligned}$$

2. Feladat Egy zsákban van öt fehér és tíz piros golyó. Visszatevés nélkül kihúzunk közülük hármat. Határozzuk meg a kihúzott fehér golyók számának várható értékét és szórását!

Mego.: Jelöljük ξ-vel a kihúzott fehér golyók számát. A visszatevés nélküli mintavételt a hipergeometrikus eloszlás írja le. Az egyes valószínűségek:

$$P(\xi = 0) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}}$$
$$P(\xi = 1) = \frac{\binom{10}{2}\binom{5}{1}}{\binom{15}{3}}$$
$$P(\xi = 2) = \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{2}}{\binom{15}{3}}$$
$$P(\xi = 3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}}$$

A várható érték:

$$E(\xi) = \frac{1}{\binom{15}{3}}\left[\binom{10}{2}\binom{5}{1} + 2\cdot\binom{10}{1}\binom{5}{2} + 3\cdot\binom{5}{3}\right]$$
$$= \frac{1}{\binom{15}{3}}(225+200+30) = 1.$$

A szóráshoz először meghatározzuk ξ^2 várható értékét:

$$E(\xi^2) = \frac{1}{\binom{15}{3}}\left[\binom{10}{2}\binom{5}{1} + 4\cdot\binom{10}{1}\binom{5}{2} + 9\cdot\binom{5}{3}\right]$$
$$= \frac{1}{\binom{15}{3}}(225+400+90) = \frac{715}{455} = 1,5714.$$

Innen:

$$D^2(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = 0,5714.$$

Végül,

$$D(\xi) = \sqrt{0,5714} = 0,756.$$

3. Feladat Egy autópályán a nap egy bizonyos időszakában az egy perc alatt áthaladó kocsik száma átlagosan 2. Dugó alakul ki, ha átlagosan 15 másodpercenként vagy annál gyakrabban követik egymást a kocsik. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy találomra kiválasztott percben dugó alakul ki!

Mego.: Az egy perc alatt elhaladó autók száma Poisson-eloszlást követ, amelynek várható értéke megegyezik a λ paraméterével. A feladat szövegéből kapjuk, hogy $\lambda = 2$. Annak a valószínűsége, hogy nem lesz dugó megegyezik azzal, hogy a kiválasztott percben 4-nél kevesebb kocsi halad el:

$$e^{-2}\left(1+2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{6}\right) = 0,8571...$$

Mivel a keresett esemény ennek komplementere, azért a válasz

$$1 - 0,8571 = 0,1428...$$

4. Feladat Adott két azonos tipusú izzó. Tudjuk, hogy 9% annak a valószínűsége, hogy mindkettő legalább 12000 óráig ég. Állapítsuk meg az egyes izzók átlagos élettartamát!

Mego.: Legyen ξ_1, ξ_2 a két égő kiégésének pillanata. Tudjuk, hogy ξ_1, ξ_2 valamely ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlást követ: $1 \le i \le 2$ és $x \ge 0$ esetén

$$P(\xi_i < x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Tehát, valószínűsége, hogy egy izzó legalább 12000 óráig ég:

$$P(\xi_i \ge 12000) = e^{-12000\lambda}.$$

Feltehető, hogy ξ_1, ξ_2 függetlenek. Annak a valószínűsége, hogy mindkét izzó legalább 12000 óráig ég:

$$P(\xi_1 \ge 12000, \xi_2 \ge 12000) = P(\xi_1 \ge 12000)P(\xi_2 \ge 12000) = (e^{-12000\lambda})^2 = e^{-24000\lambda}.$$

Tudjuk, hogy

$$e^{-24000\lambda} = 0,09.$$

Innen:

$$-24000\lambda = \ln(0,09),$$

és

$$E(\xi_1) = E(\xi_2) = \frac{1}{\lambda} = -\frac{24000}{\ln(0,09)} = 9967.$$