2. Zárthelyi megoldások

Matematika M1 terméktervezőknek

2018 november 21.

Minden feladat hibátlan megoldása 5 pontot ér.

1. Feladat Végezzük el a szukcesszív approximáció első két lépését (y_1, y_2) a következő kezdeti-érték feladathoz!

$$y'(x) = e^x + y^2, \quad y(0) = 1.$$

Mego.: Parciális integrálással:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x \left(e^t + 1^2\right) \mathrm{d}t = 1 + \left[e^t + t\right]_{t=0}^x = e^x + x, \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x \left(e^t + (e^t + t)^2\right) \mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_0^x \left(e^t + e^{2t} + 2te^t + t^2\right) \mathrm{d}t \\
&= 1 + \left[e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + 2(te^t - e^t) + \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^x \\
&= 1 + \left[-e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + 2te^t + \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^x \\
&= \frac{3}{2} - e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + 2xe^x + \frac{x^3}{3}
\end{aligned}$$

2. Feladat Adja meg az általános megoldását a $y > 0$ halmazon a $z(x) = \sqrt{y(x)}$ függvény-helyettesítéssel!

$$y'(x) = 4x\sqrt{y(x)} + 4y$$

Mego.: Minthogy

$$z'(x) = \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}}$$

azért az egyenlet ekvivalens a következővel:

$$z'(x) = 2x + 2z(x),$$

amely egy inhomogén lineáris elsőrendű egyenlet. A homogenizált egyenlet

$$Z'(x) = 2Z(x),$$

megoldása

$$Z(x) = Ce^{2x}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldását a C állandó változtatásával nyerjük:

$$z(x) = C(x)e^{2x},$$

ahol $C(x)$ megoldja a következő egyenletet:

$$C'(x)e^{2x} = 2x,$$

ahonnan parciális integrálással:

$$C(x) = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C,$$

ahol C állandó. Az általános megoldás alakja tehát:

$$z(x) = \left(-xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)e^{2x} = -x - \frac{1}{2} + Ce^{2x},$$

azaz

$$y(x) = \left(-x - \frac{1}{2} + Ce^{2x}\right)^2.$$

3. Feladat Állapítsa meg, hogy lineárisan függő-e a $x^3, \cos(x), \sin(x), e^{2x}$ függvényrendszer!

Mego.:

$$\begin{aligned}
Wr(x^3, \cos(x), \sin(x), e^{2x}) = \det &\begin{pmatrix} x^3 & \cos(x) & \sin(x) & e^{2x} \\ 3x^2 & -\sin(x) & \cos(x) & 2e^{2x} \\ 6x & -\cos(x) & -\sin(x) & 4e^{2x} \\ 6 & \sin(x) & -\cos(x) & 8e^{2x} \end{pmatrix} \\
= -\, e^{2x} \det &\begin{pmatrix} 3x^2 & -\sin(x) & \cos(x) \\ 6x & -\cos(x) & -\sin(x) \\ 6 & \sin(x) & -\cos(x) \end{pmatrix} \\
+\, 2e^{2x} \det &\begin{pmatrix} x^3 & \cos(x) & \sin(x) \\ 6x & -\cos(x) & -\sin(x) \\ 6 & \sin(x) & -\cos(x) \end{pmatrix} \\
-\, 4e^{2x} \det &\begin{pmatrix} x^3 & \cos(x) & \sin(x) \\ 3x^2 & -\sin(x) & \cos(x) \\ 6 & \sin(x) & -\cos(x) \end{pmatrix} \\
+\, 8e^{2x} \det &\begin{pmatrix} x^3 & \cos(x) & \sin(x) \\ 3x^2 & -\sin(x) & \cos(x) \\ 6x & -\cos(x) & -\sin(x) \end{pmatrix} \\
= e^{2x} &\left(-(3x^2+6) + 2(x^3+6x) - 4(3x^2+6) + 8(x^3+6x)\right) \\
= e^{2x} &\left(-5(3x^2+6) + 10(x^3+6x)\right).
\end{aligned}$$

Mivel ez a kifejezés néhány (legfeljebb három) pont kivételével nem 0, azért a vizsgált függvények a tejles számegyenesen lineárisan függetlenek.

4. Feladat Keresse meg Laplace-transzformáció segítségével a következő kezdeti-érték feladat megoldását!

$$y'''(x) + y'(x) = x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 0.$$

Mego.: Felhasználva a kezdeti-értékeket, az egyenlet Laplace-transzformáltja:

$$(s^3Y(s) - s^2 + s) + (sY(s) - 1) = \frac{1}{s^2}.$$

Átrendezéssel kapjuk:

$$(s^3 + s)Y(s) = s^2 - s + 1 + \frac{1}{s^2},$$

azaz

$$Y(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2+1)} + \frac{1}{s^3(s^2+1)}.$$

Bontsuk részlettörtekre a jobb oldalon álló első racionális törtfüggvényt:

$$\frac{s^2 - s + 1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2+1},$$

amelynek megoldása

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -1.$$

Végezzünk hasonló eljárást a jobb oldalon álló második racionális törtfüggvénnyel:

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)} = \frac{D}{s} + \frac{E}{s^2} + \frac{F}{s^3} + \frac{Gs + H}{s^2+1},$$

amelynek megoldása pedig

$$D = -1, \quad E = 0, \quad F = 1, \quad G = 1, \quad H = 0.$$

Innen kapjuk:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} + \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^3} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1},$$

ahonnan inverz Laplace-transzformációval

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \cos(x) - \sin(x).$$