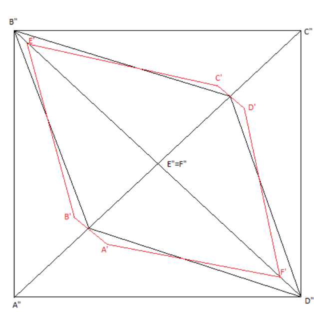
1.házi feladat

2019. szeptember 30.

1. Feladat. *Adott két egybevágó oktaéder. Párhuzamos eltolással átvihető-e az egyik a másikon úgy, hogy abból egy gyűrűszerű (tórusszal homeomorf) rész sértetlen maradjon? Válaszunkat indokoljuk.*

Megoldás. *Legyenek az oktaéder csúcsai:* $A = (1, 0, 0)^T$, $B = (0, 1, 0)^T$, $C = (-1, 0, 0)^T$, $D = (0, -1, 0)^T$, $E = (0, 0, 1)^T$, $F = (0, 0, -1)^T$.
Két oktaéder átvihető a feltételek szerint egymáson, ha van két merőleges vetülete a síkra, amelyek közül az egyik "belefér" (tehát részhalmaza) a másiknak.
Tekintsük az oktaéder vetületét az $x = y$ *síkra, ez egy rombusz lesz, melynek átlóiról könnyen láthatjuk, hogy* $A' = B'$ *és* $C' = D'$ *távolsága* $\sqrt{2}$*, illetve* E' *és* F' *távolsága* 2*. Tekintsük továbbá, az oktaéder vetületét a* $z = 0$ *síkra, erről is könnyen látszik, hogy egy* $\sqrt{2}$ *oldalú négyzet.*
Figyeljük meg, hogyan változik a vetület, ha a vetítési síkot $x = y$*-ból* $z = 0$*-ba forgatjuk a síkok metszet egyenese körül. A rombusz a vetítési sík forgatása során affin hatszögbe fejlődik, ahol* $A'B'$ *és* $C'D'$ *oldalak távolsága marad* $\sqrt{2}$*,* E' *és* F' *távolsága azonban csökkeni kezd.*
Észrevehetjük, hogy a rombuszt a hosszabbik átlója mentén a négyzet átlójára téve, az "majdnem belefér" a négyzetbe. Így ha a vetítési síkot kicsit változtatjuk a fent leírt módon, a pirossal jelölt hatszög vetület belefér a négyzet vetületbe. (Sőt addig biztosan belefér, amíg $A'F'E'$ *szög* $\frac{\pi}{4}$*-nél kisebb.) Tehát áttolható egymáson két oktaéder a feltételeknek megfelelően.*

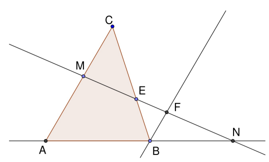


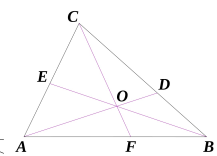
2. Feladat. *(a) Bizonyítsuk be Ceva és Menelaosz tételeit. (Ezek a tételek felhasználhatók a következő feladat megoldásához, de máshogy is megoldható.)*

(b) Bizonyítsd be, hogy a tetraéder két szemben fekvő élének felezőpontján áthaladó tetszőleges sík két azonos térfogatú testekre bontja a tetraédert.

Megoldás. *(a) Menelaosz tétel: Ha egy tetszőleges ABC háromszögben MEN egy egyenes úgy, hogy ez az egyenes átszeli a CA, BC oldalakat, illetve az AB oldal meghosszabbítását, akkor teljesül a következő állítás:*

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BN}{NA} = -1$$





Húzzunk AC-vel párhuzamost B-ből, ennek metszéspontja az egyenessel F. Ekkor AMN és BFN, illetve CEM és BEF háromszögek hasonlók, így a megfelelő oldalak arányára: $\frac{AM}{BF} = \frac{NA}{NB}$ és $\frac{CE}{EB} = \frac{MC}{BF}$, ezeket összeszorozva, és $NB = -BN$-et kihasználva épen a bizonyítandó állítás adódik.
Ceva tétel: Az ABC háromszögben AD, BE és CF egyenesek akkor és csak akkor metszik egymást egy pontban, ha:

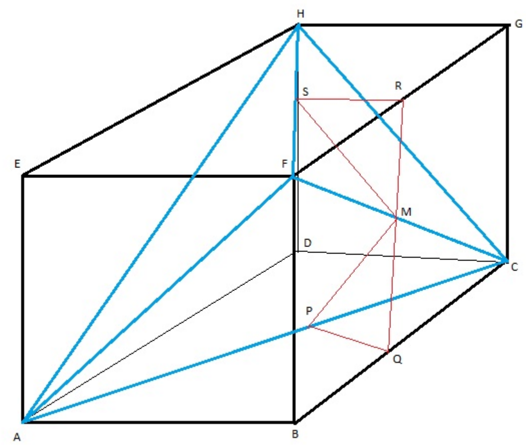
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Például ABE és BCE háromszögekre felírva a Menelaosz tételt, majd a két összefüggést összeszorozva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.
A megfordítás bizonyítása: AD és BE metszéspontja legyen Q, illetve CQ metszéspontja AB-vel legyen C'. Ekkor írjuk fel az imént Ceva tételt, valamint a megfordítás állítását:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1; \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Innen $F = C'$ adódik, tehát mindhárom egyenes átmegy a Q ponton.

(b) A tetraéder szemközti élei kitérők, így rajtuk párhuzamos síkok fektethetők. Így bármely tetraédernek a bennfoglaló paralelepipedonját kapjuk.
A sík menjen át FC és AH élek felezőpontjain, ekkor a sík nyilvánvalóan két egyenlő térfogatú részre osztja a paralelepipedont. Az is könnyen



látszik, hogy a tetraédert paralelipedonná kiegészítő négy kis tetraéder térfogata egyenlő. Így elég belátni, hogy a sík pl. $ABCF$ és $FCGH$ tetraéderekből egyenlő térfogatú részeket vág le, vagyis $FSRM$ és $MPQC$ tetraéderek térfogata egyenlő (ekkor ugyanez igaz $HEFA$ és $DHAC$ teraéderekre is, ebből pedig következik az állítás).
$FSRM$ és $MPQC$ tetraéderek térfogata pedig egyenlő, hiszen M felezőpont, $BCGF$ paralelogramma oldalai párhuzamosak, így FMR és MQC háromszögek egybevágók, illetve az is látszik, hogy S és P csúcsokhoz tartozó magasságok egyenlők.
Ezzel az állítást beláttuk.

3. Feladat. *Határozd meg az a oldalú szabályos tetraéder merőleges vetületének legnagyobb lehetséges területét.*

Megoldás. *Vegyünk két párhuzamos síkot úgy, hogy a tetraéder a két sík között van, és mindkét síkon van a teraédernek csúcsa, ekkor a két sík távolságát hívjuk a teraéder egy kiterjedésének.*
Ekkor a tetraéder síkokra való merőleges vetületének és a síkokhoz tartozó kiterjedés szorzata állandó, a tetraéder térfogatának háromszorosa. Tehát akkor kapjuk a legnagyobb területű vetületet, amikor a legkisebb kiterjedés mentén vetítünk.
Az előző feladatban láttuk, hogy a teraéderhez létezik bennfoglaló paralelepipedon, szabályos tetraéder esetében ez kocka. Innen látható, hogy a teraéder kiterjedése nem lehet kisebb a kocka élhosszánál, $\frac{a}{\sqrt{2}}$-nél. Tehát a legkisebb kiterjedést akkor kapjuk, amikor a szemközti élek felezőpontján átmenő tengely mentén vetítünk. Ekkor a vetület $\frac{a}{\sqrt{2}}$ oldalú négyzet, tehát a vetület lehető legnagyobb területe: $\frac{a^2}{2}$.

4. Feladat. *(a) Az ABC szabályos háromszög középpontján át húzzunk tetszőleges irányú egyenest, és erre a háromszög mindegyik csúcsából bocsás-*

sunk merőlegest. Bizonyítsuk be, hogy az egyenes egyik oldalára eső merőleges szakasz(ok) összege egyenlő a másik oldalra eső szakasz(ok) összegével.

(b) *Az $ABCD$ szabályos tetraéder középpontjára illeszkedő tetszőleges síkra bocsássunk merőlegeseket a teraéder csúcspontjaiból. Bizonyítsuk be, hogy a merőleges szakaszoknak a sík által meghatározott különböző félterekbe eső szakaszainak a hosszösszegei egyenlők.*

Megoldás. *(a) Tekintsük a háromszöget a komplex számsíkon úgy, hogy középpontja az origó, a behúzott egyenes pedig az x tengely. Ekkor a háromszög egyik csúcsa legyen $a + bi$, a többi csúcsa pedig ebből megkapható $\frac{2\pi}{3}$ és $\frac{4\pi}{3}$ szögű forgatásokkal. Tehát a másik két csúcs:*

$$((a \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - b \cdot \sin \frac{2\pi}{3}) + i \cdot (a \cdot \sin \frac{2\pi}{3} + b \cdot \cos \frac{2\pi}{3})$$
$$((a \cdot \cos \frac{4\pi}{3} - b \cdot \sin \frac{4\pi}{3}) + i \cdot (a \cdot \sin \frac{4\pi}{3} + b \cdot \cos \frac{4\pi}{3})$$

Látható, hogy a három csúcs képzetes részének összege nulla, tehát az x tengely egyik oldalára eső, csúcsokból az x tengelyre bocsájtott merőleges szakasz(ok) összege megegyezik a másik oldalra eső merőleges szaksz(ok) összegével.

(b) *Tekintsük a négy dimenziós térben $A = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})^T$, $B = (-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})^T$, $C = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4})^T$, $D = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4})^T$ pontokat, ezek láthatóan egy origó középpontú szabályos tetraéder csúcsai. (Tekinthetnénk három dimenziós térben is, de így szebbek a csúcsok koordinátái.)*
Vegyünk egy tetszőleges síkot amely átmegy a tetraéder középpontján (origón), ezt valamely $\mathbf{p} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}, \mathbf{p_4})^\mathbf{T}$ és $\mathbf{q} = (\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \mathbf{q_3}, \mathbf{q_4})^\mathbf{T}$ merőleges egységvektorok feszítsék ki. Ekkor a csúcsok merőleges vetületei a síkra:

$$< \mathbf{p}, \mathbf{a} > \cdot \mathbf{p} + < \mathbf{q}, \mathbf{a} > \cdot \mathbf{q}; < \mathbf{p}, \mathbf{b} > \cdot \mathbf{p} + < \mathbf{q}, \mathbf{b} > \cdot \mathbf{q};$$
$$< \mathbf{p}, \mathbf{c} > \cdot \mathbf{p} + < \mathbf{q}, \mathbf{c} > \cdot \mathbf{q}; < \mathbf{p}, \mathbf{d} > \cdot \mathbf{p} + < \mathbf{q}, \mathbf{d} > \cdot \mathbf{q}$$

Innen a síkra merőleges, csúcsokba mutató vektorok egy kivonással adódnak:

$$\frac{1}{4}((3, -1, -1, -1)^T - \mathbf{q} \cdot (\mathbf{3q_1} - \mathbf{q_2} - \mathbf{q_3} - \mathbf{q_4}) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{3p_1} - \mathbf{p_2} - \mathbf{p_3} - \mathbf{p_4}))$$
$$\frac{1}{4}((-1, 3, -1, -1)^T - \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{q_1} + \mathbf{3q_2} - \mathbf{q_3} - \mathbf{q_4}) - \mathbf{p} \cdot (-\mathbf{p_1} + \mathbf{3p_2} - \mathbf{p_3} - \mathbf{p_4}))$$
$$\frac{1}{4}((-1, -1, 3, -1)^T - \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{q_1} - \mathbf{q_2} + \mathbf{3q_3} - \mathbf{q_4}) - \mathbf{p} \cdot (-\mathbf{p_1} - \mathbf{p_2} + \mathbf{3p_3} - \mathbf{p_4}))$$
$$\frac{1}{4}((-1, -1, -1, 3)^T - \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{q_1} - \mathbf{q_2} - \mathbf{q_3} + \mathbf{3q_4}) - \mathbf{p} \cdot (-\mathbf{p_1} - \mathbf{p_2} - \mathbf{p_3} + \mathbf{3p_4}))$$

Vegyük észre, hogy ezek összege 0. Azonban ezek párhuzamosak, tehát előjeles hosszösszegük 0. Tehát a sík egyik felére eső szakaszok hosszösszege *megegyezik a sík másik felére eső szakaszok hosszösszegével, ezt kellett igazolni.*

5. Feladat. *(a) Adottak az* $(x+1)/2 = 3 - y = (z-1)/3$ *és az* $(x-3)/2 = (y-1)/3 = z-5$; *kitérő egyenesek. Határozzuk meg a normáltranszverzális egyenesüket.*

(b) $\mathbf{v} = (\mathbf{1}, -\mathbf{6}, \mathbf{2})^{\mathbf{T}}$ *iránnyal párhuzamos transzverzálisát és ennek mestzéspontjait a kitérő egynesekkel.*

(c) Ha két kitérő egyenes egyikén egy pók mászik és minden egyes pontjából a másik egyenes minden egyes pontjához egy "fonalat" sző, majd ezen "fonalszakaszok" mindegyikén az egyik egyeneshez közelebbi harmadolópontjait megjelöli, akkor mit mondhatunk erről a ponthalmazról?

Megoldás. *(a)* $(x+1)/2 = 3 - y = (z-1)/3 = t$ *és* $(x-3)/2 = (y-1)/3 = z - 5 = q$*-ból a paraméteres egyenletrendszerek (*t *és* q *tetszőleges valós szám):*

$$\begin{bmatrix} 2t-1 \\ -t+3 \\ 3t+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2q+3 \\ 3q+1 \\ q+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Innen az egynesek irányvektorai: $(2,-1,3)^T$ *és* $(2,3,1)^T$*, melyek vektoriális szorzatával párhuzamos a normáltranszverzális irányvektora:* $(-5,2,4)^T$*. Ha a normáltranszverzális* $(2t-1, -t+3, 3t+1)^T$ *és* $(2q+3, 3q+1, q+5)^T$ *pobtokban metszi az egynesek, akkor az alábbi egyenletrendszer adódik:*

$$\begin{bmatrix} 2t-1 \\ -t+3 \\ 3t+1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q+3 \\ 3q+1 \\ q+5 \end{bmatrix}$$

A háromismeretlenes három tagú egyenletrendszer megoldása: $t = \frac{71}{45}, q = \frac{1}{45}, \lambda = \frac{-8}{45}$*, ahonnan a normáltranszverzális metszete mondjuk a második egyenessel:* $(2q+3, 3q+1, q+5)^T = (\frac{137}{45}, \frac{48}{45}, \frac{226}{45})^T$*, így a normáltranszverzális egyenletrendszere (*r *tetszőleges valós szám):*

$$\begin{bmatrix} -5r + \frac{137}{45} \\ 2r + \frac{48}{45} \\ 4r + \frac{226}{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(b) Az előző gondolatmenethez hasonlóan itt az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$\begin{bmatrix} 2t-1 \\ -t+3 \\ 3t+1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q+3 \\ 3q+1 \\ q+5 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $t = \frac{1}{3}, q = \frac{-11}{9}, \lambda = \frac{8}{9}$
Tehát az egyenes metszéspontjait az adott egyenesekkel megkapjuk p*-t és*

q-t behelyettesítjük: $M_1 = (\frac{-1}{3}, \frac{8}{3}, 2)^T$ *és* $M_2 = (\frac{5}{9}, \frac{-8}{3}, \frac{34}{9})^T$*, illetve az egyenes paraméteres egyenletrendszere:*

$$\begin{bmatrix} r - \frac{1}{3} \\ -6r + \frac{8}{3} \\ 2r + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(c) *Legyen a két kitérő egyenes egy-egy pontja:* $(x_0, y_0, z_0)^T$ *és* $(x_1, y_1, z_1)^T$*, illetve irányvektoraik:* $(v_x, v_y, v_z)^T$ *és* $(u_x, u_y, u_z)^T$*.*
Válasszunk, ki mindkét egyenesről egy-egy tetszőleges pontot, és tekintsük az általuk meghatározott szakasz első egyeneshez közelebbi harmadolópontját:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_0 + x_1 \\ 2y_0 + y_1 \\ 2z_0 + z_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2v_x \\ 2v_y \\ 2v_z \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

Ez lesz tehát a keresett ponthalmaz paraméterezése (t és q tetszőleges valós szám), amely jól láthatóan $(2v_x, 2v_y, 2v_z)^T$ *és* $(u_x, u_y, u_z)^T$ *vektorok által feszített sík eltoltja. Az egyenesek kitérők, így az irányvektorok nem egyezhetnek meg, tehát valóban sík a keresett ponthalmaz.*