Geometria 2. házi feladat matematikus hallgatók részére

2019-2020 I. félév

1. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az origón és merőleges a $2x - y + 3z - 1 = 0$ és $x + 2y + z = 0$ síkokra. Határozza meg azokat az egyeneseket, amelyekben metszi a kapott sík az adott síkokat.´
2. (a) Adottak az $A = (-1, 3, 1)^T$, $B = (0, 6, 1)^T$, $C = (1, 0, 2)^T$ pontok. Határozzuk meg D pontot úgy, hogy az a koordinátasíkoktól való távolságainak az aránya $1 : 2 : 3$ (sorrendben az [x,y], [y,z], [z,x] síkoktól való távolságot tekintsük) legyen valamint $ABCD$ tetraéder térfogata 5.

   (b) Határozzuk meg továbbá a keletlezett tetraéder súlypontját, körülírt és beírt gömbjének középpontjait és ezen gömbök sugarait.
3. (a) Egy a élhosszúságú kocka egyik testátlójára illeszkedő síkmetszetek területe közül melyik minimális?

   (b) Egy tömör kocka csúcsait - hogy jobban használható legyen szerencsejátékok céljára - legömbölyítették azzal a gömbbel, amelynek középpontja a kocka középpontja és amely érinti a kocka valamennyi élét. Mekkora a maradék test felszíne és térfogata?
4. (a) Igazoljuk, hogy egy háromszög Feuerbach-köre érinti a beírt kört és a hozzáírt köröket! (Vektorokkal bizonyítsunk.)

   (b) Vektorok felhasználásával igazoljuk a háromszög Euler egyenesének létezését.

   (c) Mutassuk meg, hogy egy P pont ABC hegyesszögu háromszög oldalegyeneseire vett vetületei pontosan akkor kollineárisak, ha P illeszkedik az ABC körülírt körére! (Simson-Wallace egyenes)
5. Az O_{xyz} triéder belsejében fekvő M ponton átmenő síkok a triéderből egy tetraédert vágnak le. Igazoljuk, hogy a metsző síkok közül az határozza meg a minimális térfogatú tetraédert, amelyiknél M a metszetháromszög súlypontja.

Minden feladat 1 pontos, a nem teljes megoldások lényeges lépéseire részpontszámok kaphatók.

Beadási határidő: 2019. október 15. (legkésőbb az előadáson).

Jó munkát kívánunk!