2.házi feladat

2019. október 15.

1. Feladat. *Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az origón és merőleges a $2x - y + 3z - 1 = 0$ és $x + 2y + z = 0$ síkokra. Határozza meg azokat az egyeneseket, amelyekben metszi a kapott sík az adott síkokat.*

Megoldás. *A keresett sík merőleges a megadott síkokra pontosan akkor, ha normálvektora merőleges a megadott síkok normálvektoraira. Ekkor a keresettt sík normálvektora az adott síkok $(2, -1, 3)^T$ és $(1, 2, 1)^T$ normálvektorainak vektoriális szorzata, tehát $(-7, 1, 5)^T$. Továbba a sík az origón megy át, így egyenlete könnyen felírható: $-7x + y + 5z = 0$.*
Az első síkkal való közös egyenes: adjuk össze a két egyenletet, ekkor azt kapjuk, hogy $-5x + 8z - 1 = 0$. Legyen $x = t$ paraméter, ahol t tetszőleges valós szám. Ekkor kifejezve z-t, majd valamelyik sík egyenletéből y-t, azt kapjuk, hogy $z = \frac{5t}{8} + \frac{1}{8}$ és $y = \frac{31t}{8} - \frac{5}{8}$. Tehát a közös egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \\ \frac{-5}{8} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{8} \\ \frac{31}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

A második síkkal való közös egyenes: adjuk a második egyenlet hétszeresét a kapott sík egyenletéhez, ekkor azt kapjuk, hogy $15y + 12z = 0$. Legyen $y = t$ paraméter, ahol t tetszőleges valós szám. Ekkor kifejezve z-t, majd valamelyik sík egyenletéből y-t, azt kapjuk, hogy $z = -\frac{5t}{4}$ és $x = -\frac{3t}{4}$. Tehát a közös egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

2. Feladat. *(a) Adottak az $A = (-1, 3, 1)^T$, $B = (0, 6, 1)^T$, $C = (1, 0, 2)^T$ pontok. Határozzuk meg D pontot úgy, hogy a koordinátasíkoktól való távolságainak az aránya $1 : 2 : 3$ (sorrendben az [x,y], [y,z], [z,x] síkoktól való távolságot tekintsük) legyen, valamint $ABCD$ tetraéder térfogata 5.*

(b) Határozzuk meg továbbá a keletkezett tetraéder súlypontját, körülírt és beírt gömbjének középpontjait és ezen gömbök sugarait.

Megoldás. *(a) Legyenek* $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA} = (-2, 3, -1)^T$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB} = (-1, 6, -1)^T$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$. *Ekkor tudjuk, hogy* $ABCD$ *tetraéder térfogata:* $|\frac{1}{6}(\mathbf{abc})|$, *ahonnan* $(\mathbf{abc}) = \pm 30$. *Továbbá világos, hogy azon pontok, amelyek koordinátasíkoktól való távolságainak aránya adott négy darab egyenesen helyezkednek, ez alapján négyféleképpen paraméterezhetjük* D *pontot:*

- *1. eset:* $D = (2x, 3x, x)^T$, *így* $\mathbf{c} = (2x-1, 3x, x-2)^T$, *ekkor a térfogat:*

$$(\mathbf{abc}) = det\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2x-1 & 3x & x-2 \end{vmatrix} = 15 - 6x = \pm 30$$

  Innen $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{15}{2}$, *tehát* $D_1 = (-5, -\frac{15}{2}, -\frac{5}{2})^T$, $D_2 = (15, \frac{45}{2}, \frac{15}{2})^T$.

- *2. eset:* $D = (-2x, 3x, x)^T$, *így* $\mathbf{c} = (-2x-1, 3x, x-2)^T$, *ekkor a térfogat:*

$$(\mathbf{abc}) = det\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -2x-1 & 3x & x-2 \end{vmatrix} = 15 - 18x = \pm 30$$

  Innen $x_3 = -\frac{5}{6}$, $x_4 = \frac{5}{2}$, *tehát* $D_3 = (\frac{5}{3}, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{6})^T$, $D_4 = (-5, \frac{15}{2}, \frac{5}{2})^T$.

- *3. eset:* $D = (2x, -3x, x)^T$, *így* $\mathbf{c} = (2x-1, -3x, x-2)^T$, *ekkor a térfogat:*

$$(\mathbf{abc}) = det\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2x-1 & -3x & x-2 \end{vmatrix} = 15 \neq \pm 30$$

  Tehát ekkor nincs újabb megoldás, az egyenes párhuzamos ABC *síkkal.*

- *4. eset:* $D = (2x, 3x, -x)^T$, *így* $\mathbf{c} = (2x-1, 3x, -x-2)^T$, *ekkor a térfogat:*

$$(\mathbf{abc}) = det\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2x-1 & 3x & -x-2 \end{vmatrix} = 15 + 12x = \pm 30$$

  Innen $x_5 = \frac{5}{4}$, $x_6 = -\frac{15}{4}$, *tehát* $D_5 = (\frac{5}{2}, \frac{15}{4}, -\frac{5}{4})^T$, $D_6 = (-\frac{15}{2}, -\frac{45}{4}, \frac{15}{4})^T$.

Tehát D *csúcsra* 6 *megoldás adódik.*

(b) *A további adatokat a* $D = (-5, -\frac{15}{2}, -\frac{5}{2})^T$ *érték esetén számoljuk ki.*
A súlypont koordinátaái a csúcsok negfelelő koordinátáinak számtani középei, így $S = (-\frac{5}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})^T$.

Legyen a körülírt gömb középpontja $O(x_1, y_1, z_1)^T$, sugara pedig R. A csúcsok mind R távolságra vannak O-tól, ez alapján az alábbi egyneletrendszer adódik:

$$(-1-x_1)^2 + (3-y_1)^2 + (1-z_1)^2 = R^2$$
$$(0-x_1)^2 + (6-y_1)^2 + (1-z_1)^2 = R^2$$
$$(1-x_1)^2 + (0-y_1)^2 + (2-z_1)^2 = R^2$$
$$(-5-x_1)^2 + (-7.5-y_1)^2 + (-2.5-z_1)^2 = R^2$$

Az egyenletrendszer értelmes megoldása: $Q = (\frac{95}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{205}{8})^T$ és $R = \frac{\sqrt{56418}}{8}$.
Legyen a beírt gömb középpontja $Q(x_2, y_2, z_2)^T$, sugara pedig r. A tetraéder lapjai egyenlő távolságra vannak a beírt gömb középpontjától, így az oldallapok síkjainak normálegyenletébe Q-t helyettesítve éppen r-et kapjuk. Az ebből adódó egyenletrendszer:

$$CAB: \frac{|3x_2 - y_2 - 9z_2 + 15|}{\sqrt{91}} = r$$
$$CAD: \frac{|-21x_2 - 3y_2 + 33z_2 - 45|}{\sqrt{1539}} = r$$
$$DAB: \frac{|-21x_2 + 7y_2 + 3z_2 - 45|}{\sqrt{499}} = r$$
$$CBD: \frac{|-69x_2 + 3y_2 + 87z_2 - 105|}{\sqrt{12339}} = r$$

Ezen egyenletrendszer megoldásából adódó értelmes megoldások adják Q-t és r-et (tehát amikor Q a teraéder belsejében van, és r pozitív).

3. Feladat. *(a) Egy a élhosszúságú kocka egyik testátlójára illeszkedő síkmetszetek területe közül melyik minimális?*

(b) Egy tömör kocka csúcsait - hogy jobban használható legyen szerencsejátékok céljára - legömbölyítették azzal a gömbel, amelynek középpontja a kocka középpontja és amely érinti a kocka valamennyi élét. Mekkora a maradék test felszíne és térfogata?

Megoldás. *(a) Helyezzük el a kockát a koordinátarendszerben úgy, hogy csúcsai: $A = (0,0,0)^T$, $B = (0,a,0)^T$, $C = (a,a,0)^T$, $D = (a,0,0)^T$, $E = (0,0,-a)^T$, $F = (0,a,-a)^T$, $G = (a,a,-a)^T$, $H = (a,0,-a)^T$. Ekkor könnyen látható, hogy a testátlón átmenő síkok metszetei a kockával négyszögek (például ahogy a síkot forgatjuk a BH testátló körül a metszet $ABGH$ négyszögből $DBFH$ négyszögbe fejlődik). Ezen négyszögek csúcsai B és H nyilvánvalóan, továbbá $M = (t,0,0)^T$ az AD szakasz pontja, $N = (t,a,-a)^T$ az FG szakasz pontja. Ekkor BMH és HBN háromszögek egybevágók, a kérdés, hogy milyen M, N esetén minimális a területük. Bármely T-re TBH háromszög BH alapja adott, az ehhez* *tartozó magasság és így a terület akkor lesz minimális, ha a magasság AD és BH normáltranszverzálisa. A normál transzverzális irányvektora $(1,0,0)^T$ és $(1,-1,-1)^T$ vektoriális szorzata, azaz $(0,-1,1)^T$. A magasság talppontja BH-n legyen $Q = (qa, a-qa, -qa)^T$ $(1 \geq q \geq 0)$ Így az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:*

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qa \\ a-qa \\ -qa \end{bmatrix}$$

Ennek megoldása $t = \frac{a}{2}$, tehát ha M az AD felezőpontja, akkor minimális a terület. A megoldásból $q = \frac{1}{2}$, tehát Q a BH felezőpontja, így a magasság: $\frac{a}{\sqrt{2}}$, tehát $HNBM$ négyszög, vagyis a minimális síkmetszet területe: $\frac{\sqrt{3}a^2}{\sqrt{2}}$.

(b) *A keletkező testet úgy is felfoghatjuk, hogy a gömbről levágunk hat darab gömbsüveget, amelyek kilógnak a kockából. Legyen a gömb sugara egységnyi.*
Így a térfogathoz elég ezen gömbsüvegek térfogatát kivonni a gömbéből. Ha gömb sugara egységnyi, könnyen látszik, hogy a kocka élhossza $\sqrt{2}$. Innen a gömbsüveg magassága $m = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Az is látszig, hogy a gömbsüveg alapköre éppen a kocka egy oldallapjának beírt köre, így az alapkör sugara: $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ezekől a gömbsüveg térfogatképlete alapján $V_G = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(3 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \pi \frac{1}{3} \approx 0.2432$. Tehát a test térfogata: $V = \frac{4}{3}\pi - 6V_G \approx 2.7296$.
A gömbsüveg felszíne a rá vonatkozó képlet alapján: $A_G = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 1.8403$, illetve a gömsüvegek alapköreinek területe: $A_K = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \pi \approx 1.5708$. Így a test felszíne: $A = 4\pi - 6A_G + 6A_K \approx 10.9494$.

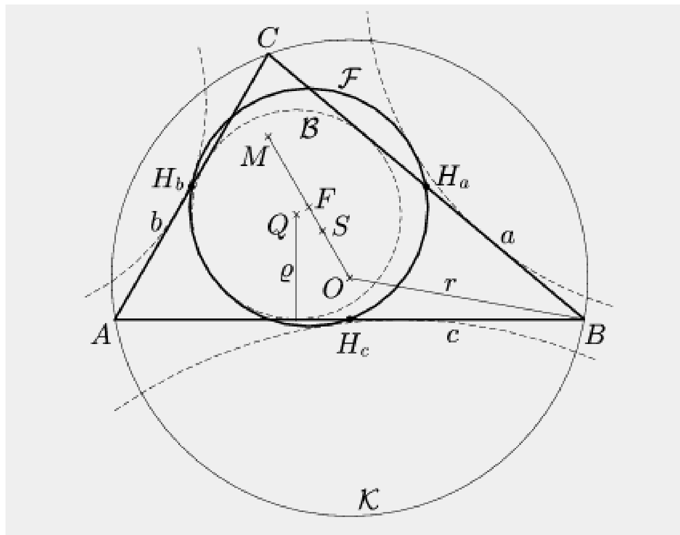
4. Feladat. *(a) Igazoljuk, hogy egy háromszög Feuerbach-köre érinti a beírt kört, és a hozzáírt köröket! (Vektorokkal bizonyítsunk.)*

(b) *Vektorok felhasználásával igazoljuk a háromszög Euler-egyenesének létezését.*

(c) *Mutassuk meg, hogy egy P pont ABC hegyesszögű háromszög oldalegyeneseire vett vetületei pontosan akkor kollineárisak, ha P illeszkedik az ABC körülírt körére! (Simson-Wallace egyenes)*

Megoldás. *(a) Használjuk az ábrán látható jelöléseket, O-ból minden pontba azonos nevű helyvektor mutasson. A Feuerbach-körről tudjuk, hogy F középpontja a magasságpont és köré írt kör középpontjának szakszának, OM-nek a felezőpontja, így $\mathbf{f} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$, hiszen a magasságpontba mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok összege. Ez onnan látszik, hogy $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ rajta van mindhárom magasságvonalon, hiszen*

$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})-\mathbf{c}$ *skalárisan szorozva a szembenlévő oldal* $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ *vektorával 0, ugyanis* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *egyenlő hosszúak. Így* C*-ből* $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ *végpontjába mutató vektor merőleges* AB *oldalra tehát* $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ *végpontja valóban a magasságvonalon van.*



A beírt kör középpontjába mutató vektor $\mathbf{q}=\frac{a\mathbf{a}+b\mathbf{b}+c\mathbf{c}}{a+b+c}$*, ahol* a,b,c *a* BC,AC,AB *oldalak hosszai. Ez onnan látszik, hogy* $\frac{1}{b}(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ *és* $\frac{1}{c}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ A*-ból* C*-be és* B*-be mutató egységvektorok összege a paralelogramma szabály miatt rajta van a szögfelezőn, így az összeg* $\frac{1}{a+b+c}$*-szerese is rajta van, ami éppen* $\mathbf{q}$*. Azonban a másik két szögfelezőn is ugyanígy rajta van, tehát ez a beírt kör középpontjába mutató vektor.*
Ezek alapján $\mathbf{q}$*,* $\mathbf{f}$ *és* $\mathbf{qf}$ *vektorok hosszai meghatározhatók:*

$$|\mathbf{q}|^2=r^2-2r\varrho$$
$$|\mathbf{f}|^2=\frac{1}{4}(9r^2-a^2-b^2-c^2)$$
$$2\mathbf{qf}=3r^2-\frac{1}{2(a+b+c)}(ac^2+bc^2+ab^2+cb^2+ba^2+ca^2)$$

Ezek alapján:

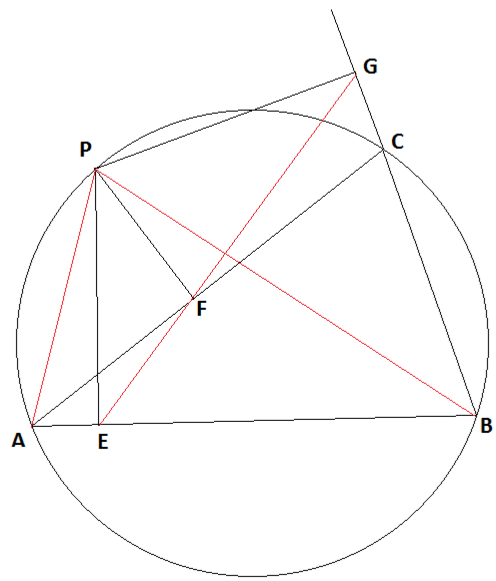
$$|\mathbf{q}-\mathbf{f}|^2=|\mathbf{q}|^2+|\mathbf{f}|^2-2\mathbf{qf}=\left(\frac{1}{2}r-\varrho\right)^2$$

Vagyis az $\frac{1}{2}r$ *sugarú Feuerbach-kör középpontjából* $\left(\frac{1}{2}r-\varrho\right)$*-el eltolva a* ϱ *sugarú kört éppen a beírt kört kapjuk, amely a sugarak hossza alapján érinti a Feuerbach-kört.*
A hozzáírt körökre ugyanígy történik a bizonyítás, ott azt használjuk, hogy

a H_a hozzáírt kör középpontjába mutató vektor: $\mathbf{q_a} = \frac{-a\mathbf{a}+b\mathbf{b}+c\mathbf{c}}{-a+b+c}$, *a számolások hasonlóan történnek, mint a beírt körnél.*

(b) *Láttuk, hogy O-ból a magasságpontba mutató vektor* $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$, *illetve a súlypontba mutató vektor nyilván* $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$, *tehát O-ból M-be és S-be mutató vektorok párhuzamosak, így a három pont valóban egy egyenesen van (Euler-egyenes).*

(c) *Tudjuk, hogy egy körben azonos húrhoz tartozó kerületi szögek megegyeznek. Legyen PCF szög φ. Ekkor $PGCF$ négyszög húrnégyszög (G-nél és*



F-nél derékszög van), így PGF szög is φ.
$PCF = PCA$ szöggel megegyezik PBA szög, mert mindkettő az PA húrhoz tartozó kerületi szög. Azonban $PGBE$ négyszög szintén húrnégyszög (G-nél és E-nél derékszög van), így PGE szög megyegyezik $PBE = PBA = PCA = \varphi$ szöggel.
Tehát $PGE = PGF = \varphi$, ebből viszont következik, hogy F rajta van GE egyenesen.
Ha a P pontot a körvonalon kívülre vagy belülre visszük, akkor $PGF = \varphi$ továbbra is igaz, azonban $PGF \neq \varphi$, hiszen $PBA = PGE$ szöge eltér φ-től, azáltal, hogy a körvonalról elmozdítjuk P-t, így F ekkor nem lehet a GE egyenesen.

5. Feladat. *Az O_{xyz} triéder belsejében fekvő M ponton átmenő síkok a triéderből egy tetraédert vágnak le. Igazoljuk, hogy a metsző síkok közül az határozza meg a minimális térfogatú teraédert, amelyiknél M a metszetháromszög súlypontja.*

Megoldás. *Legyen* $M = (m_1, m_2, m_3)^T$*, ekkor* M*-en átmenő* $(a, b, c)^T$ *normálvektorú sík egyenlete:* $ax + by + cz = am_1 + am_2 + am_3 = k$*. Könnyen látszik, hogy ezen sík metszetei az* x*,* y*,* z *tengelyekkel rendre* $\frac{k}{a}$*,* $\frac{k}{b}$*,* $\frac{k}{c}$*.*
Így M *pont a metszetháromszög súlypontja pontosan akkor, ha* $M = (\frac{k}{3a}, \frac{k}{3b}, \frac{k}{3c})^T = (m_1, m_2, m_3)^T$*. Az ebből adódó egyenletrendszerből az következik, hogy* $am_1 = bm_2 = cm_3$*.*
Az alábbi vektorok éppen a vizsgált tetraédert feszítik: $(\frac{k}{a}, 0, 0)^T$*,* $(0, \frac{k}{b}, 0)^T$*,* $(0, 0, \frac{k}{c})^T$*, tehát ezek vegyesszorzata a teraéder térfogatának hatoda.*

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \frac{k}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{c} \end{vmatrix} = \frac{k^3}{6abc} = \frac{(am_1 + am_2 + am_3)^3}{6abc} \geqslant \frac{27abcm_1m_2m_3}{6abc} = \frac{9}{2}m_1m_2m_3$$

Ahol a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget használtuk becslésnek, így azt kaptuk, hogy a térfogat $\frac{9}{2}m_1m_2m_3$*-nél biztosan nagyobb, ami állandó, így akkor minimális a térfogat, ha ezt az értéket veszi fel. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségről tudjuk, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha* $am_1 = bm_2 = cm_3$*, amiről pedig láttuk, hogy azzal ekvivalens, hogy* M *súlypontja a metszetháromszögnek. Ezzel az állítást beláttuk.*