3.házi feladat

2019. október 29.

1. Feladat. *A hegyesszögű ABC háromszög mindegyik magasságvonala, mint átmérő fölé rajzoljunk félkört, s mindegyik félkört metsszük el a háromszög M magasságpontján átmenő és a félkör átmérőjére merőleges egyenessel, a metszéspontok legyenek P, Q, R. Bizonyítsuk be, hogy az MP, MQ, MR szakaszok egyenlőek!*

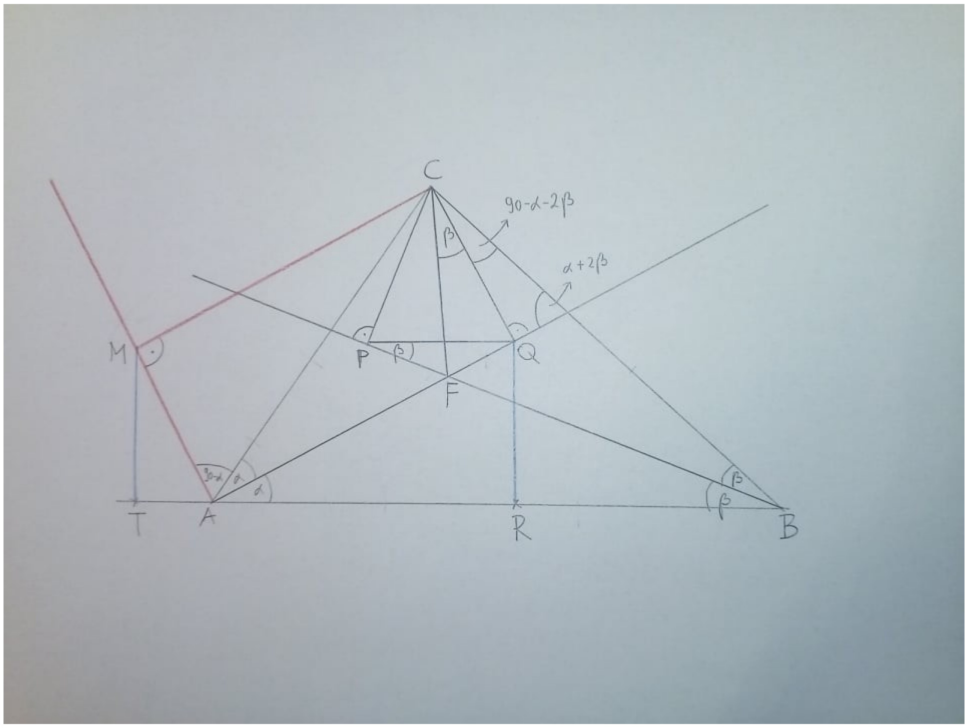
Megoldás. *Legyenek a háromszög magasságvonalainak megfelelő csúcsokhoz tartozó magasságainak talppontjai A_1, B_1, C_1. Ekkor legyen $AM = u, MA_1 = v, BM = w, MB_1 = x, CM = y, MC_1 = z$. Ekkor P rajta van az AM Thálesz körén, így APM háromszög derékszögű, és benne a P-hez tartozó magasság MP, tehát a magasságtétel miatt $MP = \sqrt{uv}$. Hasonlóan $MQ = \sqrt{wx}$ és $MR = \sqrt{yz}$. Azonban például BMA_1 és APB_1 derékszögű háromszögek hasonlóak, hiszen egyik nem derékszögű szögük megegyezik (csúcsszögek). Tehát a hasonlóságot felírva a megfelelő oldalak arányára: $uv = xw$. Az összefüggésből gyököt vonva kapjuk, hogy $MP = MQ$. Ugyanígy azt is megkapjuk, hogy $MP = MQ = MR$.*

2. Feladat. (a) *Állítsunk merőlegeseket a háromszög egyik csúcsából a másik két csúcshoz tartozó szögfelezőkre (külső és belső). Bizonyítsuk be, hogy a négy merőleges talppontja egy egyenesen van!*

(b) *Az ABC háromszög oldalfelező pontjai a szokásos jelölések szerint A_1, B_1, C_1. Mutassuk meg, hogy az $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ háromszögek beírt illetve körülírt köreinek középpontjai által alkotott két háromszög egybevágó.*

Megoldás. (a) *Tekintsük az ábra jelöléseit. Az A csúcsnál lévő külső és belső szögfelezők merőlegesek, ez könnyen látható. Így $CMAQ$ négyszög téglalap, ahol AMC és CQA egybevágó háromszögek, tehát M távolsága AC-től megegyezik Q távolságával AC-től. Azonban M és Q is az A-ból induló szögfelezőn van (külsőn illetve belsőn), tehát M távolsága AC-től, megegyezik M távolságával AB-től, Q-ra ugyanez igaz. Tehát M és Q távolsága ugyanannyi AB-től, így MQ párhuzamos AB-vel. Ugyanígy jön, hogy PN is párhuzamos AB-vel (N a B-hez tartozó külső szögfelezőre állított merőleges talpontja). Tehát ha belátjuk, hogy PQ is párhuzamos AB-vel, abból következik, hogy min a négy pont egy AB-vel párhuzamos egyenesen van.*

Legyenek az A-nál és B-nél lévő szögek α, β. Háromszög külső szögére ismert összefüggés alapján adódik, hogy AA_1C szög $\alpha + 2\beta$, tehát CQA_1



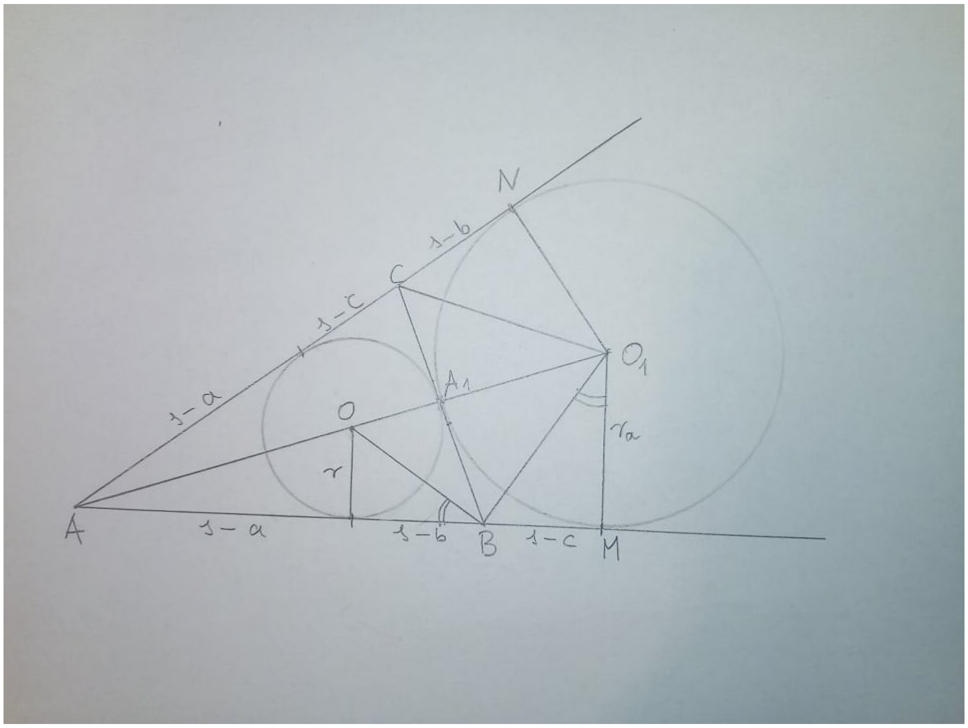
derékszögű háromszögben QCA_1 szög $90-\alpha-2\beta$. Azonban CF szögfelező, így BCF szög $180-2\alpha-2\beta$ fele, tehát kivonással adódik, hogy FCQ szög β. $CPFQ$ húrnégyszög, mert egy szemközti szögpárja derékszög, így FPQ és FCQ azonos húrhoz tartozó kerületi szögek, tehát egyenlőek, így FPQ szög β. Ez viszont azt jelenti, hogy ABP és BPQ váltószögek, tehát PQ párhuzamos AB-vel, ezt akartuk belátni.

(b) *Könnyen látható, hogy AB_1C_1, CA_1B_1, BC_1A_1 egybevágó háromszögek, hiszen mind az ABC háromszög $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítettjei (oldalaik vagy ABC oldalának fele, vagy ABC középvonala, amely ABC szemközti oldalának fele). Tehát CA_1B_1 AB_1C_1-ből $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$-vel való eltolással kapható, így annak beírt és körülírt körének középpontja is ugyanilyen eltolással kapható a másik háromszög megfelelő pontjaiból. Ugyanígy BC_1A_1 CA_1B_1-ből $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ és AB_1C_1 BC_1A_1-ből $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ eltolással kapható, analóg módon a körök középpontjai is. Így a beírt illetve a körülírt körök középpontjai által meghatározott háromszögek oldalai is ABC oldalainak fele, így ez a két háromszög egybevágó, ezt kellett igazolni.*

3. Feladat. (a) *Bizonyítsuk be Heron-képletét háromszögek területére.*

(b) *Adjuk meg és bizonyítsuk az analóg tételt húrnégyszögek területére. Kiről nevezték el ezt a formulát?*

Megoldás. *(a) Használjuk az ábra jelöléseit.*



Jelöljük a beírt kör B-vel szemközti érintési pontját Q-val, C-vel szemköztit R-el, A-val szemköztit S-el. Ha s a háromszög félkerülete, továbbá, felhasználjuk, hogy a körhöz, külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, akkor $c = AB = s - CQ$, így $CQ = s - c$. Ugyanígy adódik, hogy $AQ = AR = s - a$ és $BR = s - b$. $CN = CS$ és $BS = BM$, tehát $AM + AN$ éppen a háromszög kerülete, de ezek egyenlőek (külső pontból húzott érintőszakaszok), így $AM = AN = s$, tehát kivonással: $BM = s - c, CN = s - b$.

$$T_{ABC} = T_{AO_1M} + T_{AO_1N} - T_{BO_1M} - T_{CO_1N} - T_{CO_1B}$$
$$T_{ABC} = r_a s - \frac{1}{2}r_a(s-c) - \frac{1}{2}r_a(s-b) - \frac{1}{2}r_a a = r_a(s-a)$$

Azonban BOR és BO_1M háromszögek hasonlóak, hiszen szögeik megegyeznek (merőleges szárú szögek), így a hasonlóságot felírva a megfelelő oldalak arányára $\frac{r}{s-b} = \frac{s-c}{r_a}$, ahonnan $r_a = \frac{(s-b)(s-c)}{r}$, tehát:

$$T_{ABC} = r_a(s-a) = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{rs}$$
$$T_{ABC}^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$T_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Ugyanis $T_{ABC} = rs$, így amit kapunk éppen a Heron-képlet.

(b) *Brahmagupta-képlet (Brahmagupta indiai matematikus): húrnégyszög oldalai a, b, c, d és félerülete s, akkor területe: $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.*

Ha a négyszög téglalap, akkor triviális az állítás. Ha $ABCD$ húrnégyszög nem téglalap, meghosszabbíthatjuk AB és CD oldalait úgy, hogy azok valamely P pontban messék egymást. A húrnégyszög szögei miatt PAD és PBC háromszögek hasonlóak $\frac{d}{b}$ aránnyal ($d = AD, b = BC, c = CD, a = AB$). Így az alakzatok területeit összehasonlítva:

$$T_{ABCD} = \frac{b^2 - d^2}{b^2} T_{PBC}$$

Ekkor PBC és PAD háromszögek hasonlóságát kihasználva BPC háromszög területére felírva a Heron képletet, egyszerű számolások után éppen a bizonyítandó összefüggést kapjuk.

4. Feladat. (a) *Szerkessze meg egy adott síkban az adott O_1 középpontú $-60°$, O_2 középpontú $-30°$ és O_3 középpontú $30°$ forgatások egymásutánjaként keletkező transzformáció középpontját. (Diszkutáljuk a feladatot a középpontok elhelyezkedésének függvényében.)*

(b) *Ha feltesszük, hogy $O_1O_2O_3$ pontok egy általános háromszöget határoznak meg, akkor szerkesszük meg ennek a háromszögnek az előző transzformációnál keletkező képét $O_1'O_2'O_3'$ háromszöget. Mit mondhatunk az O_1O_1', O_2O_2', O_2O_2' szakaszok felezéspontjai által meghatározott háromszögről?*

Megoldás.

(a) *Először szerkesszük meg Q-t, amelyre:*

$$O_2^{-30°} \circ O_1^{-60°} = Q^{-90°}$$

Az O_1O_2Q háromszögből 2 pont adott, valamint ezen oldalon fekvő mindkét szögét ismerjük, így Q könnyen szerkeszthető:

$$QO_1O_2\measuredangle = 30°$$
$$QO_2O_1\measuredangle = 15°$$

A keresett transzformáció:

$$O_3^{-60°} \circ O_2^{-30°} \circ O_1^{-60°} = O_3^{30°} \circ Q^{-90°} = P^{-60°}$$

Az O_3QP háromszögből két pont adott, valamint ezen oldalon fekvő mindkét szöget ismerjük, így P könnyen szerkeszthető:

$$O_3QP\measuredangle = 135°$$
$$PO_3Q\measuredangle = 15°$$

A feladatban szereplő összes szög szerkeszthető, így ezek a háromszögek szerkeszthetőek. (A középpontok a három pont bármely elhelyezkedésére szerkeszthetők, ha háromszöget határoznak meg, és ha egy egyenesen vannak is, illetve ha valamely két pont egybeeseik, akkor éppen a pont lesz a középpont is.)

(b) P pontot megszerkesztettük, a fenti transzformáció pedig P körüli $-60°$-os forgatás, tehát a középpontok képei könnyen szerkeszthetőek a forgatásnak megfelelően. Az eredti és a transzformáció után kapott háromszögek megfelelő csúcsait összekötő szakaszok felezőpontjairól könnyen látszik, hogy a két háromszöggel egybevágó harmadik háromszöget határoznak meg (oldalaik hossza megegyezik).

5. Feladat. *Tekintsünk egy egységnyi élhosszúságú K kockát, és annak három csúcsát, amelyek egy szabályos háromszöget határoznak meg. Jelöljük a kockának erre a síkra vonatkozó merőleges vetületét K'-vel, valamint a szabályos háromszög síkját α-val. Tükrözzük a kockát a szabályos háromszög oldalegyeneseire, majd vetítsük merőlegesen a kapott alakzatot az α síkra. Milyen alakzat adódik, és az milyen kapcsolatban van az eredeti K kockának a szabályos háromszög síkjára vonatkozó K' vetületével.*

Megoldás. *A szabályos háromszög oldalai a kockában lapátlók, tehát a kockát lapátlóira kell tükrözni. Ezek a tükörképek nyilvánvalóan szintén kockák lesznek, melyeknek egyetlen közös lapjuk van K-val (amelyiken a lapátló van). Tehát K azon lapátlói, amelyek a szabályos háromszög oldalai, a tükörkép kockákban is lapátlók lesznek, vagyis könnyen látszik, hogy α a tükörkép kockákból is ugyanúgy szabályos háromszögeket metsz ki, mint K-ból. Tehát a tükörkép kockák merőleges vetületei α-ra egybevágóak K'-vel, annak eltoltjai. K' pedig semmi más, mint egy szabályos hatszög, ugyanis α merőleges a kocka egy testátlójára, és a testátló mentén vett merőleges vetület szabályos hatszög, melynek oldalhossza $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Az is látható, hogy a tükörkép kockák vetületei K'-nek olyan eltoltjai, hogy K'-vel pontosan két-két közös csúcsuk van (a közös lapátló két végpontja).*