4.házi feladat

2019. november 13.

1. Feladat. *Legyen ABC tetszőleges hegyesszögű háromszög. Legyen $\mathbf{T}$ az a transzformáció, amelyet az AC, AB majd BC egyenesekre való tükrözések ebben a sorrendben történő végrehajtása határoz meg. Jelöljük O-val ABC háromszög köréírt körének középpontját, valamint az oldalak felezéspontjait jelölje rendre A_1, B_1, C_1 (A-val szemközti oldalon az A_1 sít...).*

(a) Igazoljuk, hogy $\mathbf{T}(O)\mathbf{T}(C_1)$ egyenese merőleges AB egyenesére.

(b) Igazoljuk, hogy $O\mathbf{T}^{2017}(0), A\mathbf{T}^{2019}(A), B_1\mathbf{T}^{2021}(B_1)$ szakaszok felezéspontjai egy egyenesre illeszkednek.

(c) Mutassuk meg, hogy $A_1\mathbf{T}^{1000}(A_1)$ egyenese párhuzamos $O\mathbf{T}^{1000}(0)$ egyenessel.

Megoldás. *Jelölje az AC, AB, BC oldalakra való tükrözéseket rendre $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$, ekkor $\mathbf{T} = \mathbf{acb}$ Tudjuk, hogy két metsző tengelyű tükrözés szorzata nem változik, ha a tengelyeket a metszéspont körül elforgatjuk. Így forgassuk el AB, AC párt A körül, hogy AB' merőleges legyen BC-re, majd AB'-t és BC-t metszéspontjuk körül úgy, hogy AB'' merőleges legyen AC'-re. Ekkor AC' és BC' is merőleges AB''-re és $\mathbf{T} = \mathbf{acb} = \mathbf{a'c''b'}$. Tehát $\mathbf{T}$ csúsztatva tükrözés, páros hatványai pedig eltolások.*

(a) OC_1 merőleges AB-re, mert a beírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja, a csúsztatva tükrözés után OC_1 képe párhuzamos lesz az eredetivel, tehát az továbbra is merőleges AB-re.

(b) Egy pont és képe ugyanolyan messze van a csúsztatva tükrözés tükröző c'' tengelyétől, hiszen az eltolások c''-vel párhuzamosan történnek. A $\mathbf{T}$ páratlan hatványai a pontokat a c'' által meghatározott másik féltérbe képezi, így egy pontot összekötve $\mathbf{T}$ páratlan sok elvégzése után kapott képével, a zakasz felezőpontja éppen c''-n lesz. Tehát a pontok valóban egy egyenesre illeszkednek.

(c) $\mathbf{T}$ páros elvégzése eltolás, így $A_1\mathbf{T}^{1000}(A_1)$ és $O\mathbf{T}^{1000}(0)$ is párhuzamos c''-vel, tehát egymással is párhuzamosak.

2. Feladat. *Az ABC gömbháromszög oldalai legyenek $a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{\pi}{4}, c = \frac{2\pi}{3}$. Határozzuk meg a háromszög köré és beleírt kör sugarát valamint a háromszög szögeit. (A gömb sugara ebben a feladatban és a továbbiakban is egységnyi.)*

Megoldás. *A megadott szögekkel nem létezik gömbi háromszög.*
Számítsuk ki a kért adatokat $a = \frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{3}, c = \frac{2\pi}{3}$ esetén.
Ekkor a háromszög szögei az oldalakra felírt koszinusztételekkel számolhatók: $\alpha \approx 70°31', \beta \approx 54°44', \gamma \approx 125°15'$. Ha O a beírt kör középpontja, P pedig az érintési pontja BC oldalon, akkor mivel a csúcsokat O-val összekötő szakaszok felezik a szögeket, BCO-ra szögekre vonatkozó koszinusztétel:

$$\cos COB\sphericalangle = -\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos(a)$$

Ahonnan $COB\sphericalangle \approx 114°5'$. A háromszögre szinusztételt felírva OB megkapható:

$$\frac{\sin OB}{\sin a} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin 114°5'}$$

Ebből $OB \approx 76°36'$, majd OPB derékszögű háromszögre is felírva a szinusztételt $\sin OP = \sin r = \sin OB \sin\frac{\beta}{2}$, amiből $r \approx 26°33'$.
Ha F az AB oldal felezőpontja, akkor BCF gömbi háromszög CF oldalára felírva a koszinusztételt adódik: $\cos CF = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}\cos\beta$, ahonnan $CF = \frac{\pi}{3}$. Észrevehetjük, hogy $CF = BF = AF$, tehát F a körülírt kör középpontja, amelynek sugara így $R = \frac{\pi}{3}$.

3. Feladat. *(a) Az ABC gömbháromszög oldalai legyenek $a = \frac{\pi}{4}, b = \frac{\pi}{3}, c = \frac{\pi}{6}$. Jelölje az A csúccsal szemközti oldal felezéspontját A_1. Hasonlóan B és C csúcsok esetében B_1 illetve C_1. Határozzuk meg az $A_1B_1C_1$ gömbi háromszög területét, valamint az AA_1 gömbi súlyvonalszakasz hosszát.*

(b) Igaz marad-e a gömbi geometriában, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 súlyvonalak egy ponton haladnak át és harmadolják egymást?

Megoldás. *(a) Jelölje az A, B, C csúcsoknál lévő szögeket rendre α, β, γ, illetve A_1, B_1, C_1 csúcsoknál lévő szögeket rendre $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Írjuk fel a gömbi koszinusztételt BC oldalra:*

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha$$

Ahonnan $\alpha \approx 50°43'$. Ugyanígy írjuk fel a gömbi koszinusztételt AC és AB oldalakra, ezekből $\beta \approx 108°32'$ és $\alpha \approx 33°11'$.
Ekkor írjuk fel a gömbi koszinusztételt AB_1C_1 háromszögben B_1C_1 oldalra (tudjuk, hogy B_1 és C_1 felezik AC és AB oldalakat):

$$\cos B_1C_1 = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}\cos 33°11'$$

Innen $B_1C_1 \approx 23°18'$. Ugyanígy BC_1A_1 és CA_1B_1 háromszögek A_1C_1, A_1B_1 oldalaira felírva a kosziunusztételt, azt kajuk, hogy $A_1C_1 \approx 30°34'$, $B_1A_1 \approx 16°12'$.
Ekkor $A_1B_1C_1$ háromszög B_1C_1 oldalára felírva gömbi koszinusztételt:

$$\cos 23°18' = \cos 30°34' \cos 16°12' + \sin 30°34' \sin 16°12' \cos\alpha_1$$

Amiből $\alpha_1 \approx 49°47'$. *Ugyanígy a másik két oldalra felírva a koszinusztételt kapjuk, hogy* $\beta_1 \approx 100°56'$ *és* $\gamma_1 \approx 32°35'$. *Szögeket radiánba átválta megkapjuk* $A_1B_1C_1$ *háromszög területét:* $T = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \pi \approx 0.0584$. AA_1 *hossza adódik* ABA_1 AA_1 *oldalára felírt koszinusztételből:*

$$\cos AA_1 = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{8}\cos 108°32'$$

Ahonnan $AA_1 \approx 42°19'$.

(b) ABC *minden csúcsába mutasson a gömb középpontjából azonos nevű helyvektor. Ekkor* A_1*-be mutató vektor nyilván párhuzamos* $\mathbf{b}+\mathbf{c}$*-vel. Így* AA_1 *merőleges az őt feszítő vektorok vektoriális szorzatára:* $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a}$*-ra. Ugyanígy* BB_1 *merőleges* $(\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b}$*-re, és* CC_1 *merőleges* $(\mathbf{b}+\mathbf{a})\times\mathbf{c}$*-re. Tehát* AA_1 *és* BB_1 *metszéspontjába mutató vektor merőleges az* AA_1*-re és* BB_1*-re merőleges vektorokra is, vagyis párhuzamos* $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a}\times(\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b}$ *vektorral.*
Átalakításokkal:$(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a}\times(\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b} = (\mathbf{abc})(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$. *Látható, hogy ugyanezt kapjuk, ha másik két súlyvonal metszéspontját írjuk fel (kifejezés szimmetrikus), vagyis a súlyvonalak valóban egy ponton mennek át. Azonban nem harmadolják egymást, ugyanis* AA_1 *gömbi húr* A_1*-hez közelebbi harmadolópontjába mutató vektor* $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{2}\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{\mathbf{3}}$*, amely párhuzamos a fent látott, súlypontba mutató vektorral, de a gömbi húr harmadolópontjába nyilvánvalóan nem feltétlenül ugyanaz a vektor mutat, mint a hozzá tartozó ív harmadolópontjába.*

4. Feladat. *Számítsuk az egységnyi területű szabályos gömbi négyszög (gömbi négyzet) beírt és köréírt körének területét. Mekkora területű gömbi négyzet egybevágó példányaival lehet átfedés nélkül biztosan lefedni a gömb felszínét.*

Megoldás. *Legyen* α *a négyzet egy szöge, ekkor* $4\alpha - 2\pi = 1$, *tehát* $\alpha \approx 1.821 \approx 104°19'$. *A négyzet két átellenes csúcsa és a négyzet középpontja szabályosság miatt egy egyenesen van. A négyzet középpontja egyben a beírt és a köréírt körök középpontja is. Továbbá a szimmetria miatt az átló felezi a négyzet szöget, így ha felírjuk a szögekre vonatkozó koszinusztételt a négyzet két oldala és egy átlója által meghatározott háromszögre, megkaphatjuk az átlót, ami a köré írt kör sugarának kétszerese:*

$$\cos 104°19' = \cos 52°10'\cos 52°10' + \sin 52°10'\sin 52°10'\cos 2R$$

Innen $R \approx 39°2'$. *Ezután a négyzet középpontja, a négyzet egy csúcsa és a beírt kör egy érintési pontja által meghatározott háromszögre felírható a szinusztétel:*

$$\frac{\sin 52°10'}{\sin 90°} = \frac{\sin 39°2'}{\sin r}$$

Ebből pedig $r \approx 29°49'$. *Tehát a körök területei:* $T = 2\pi(1-\cos 39°2') \approx 1.402, t = 2\pi(1-\cos 29°49') \approx 0.832$.
Legyen α *a gömbi négyzet szöge, mellyel átfedés nélkül lefedhető a gömb. Ekkor*

látható, hogy az átfedés nélküli fedéshez $m\alpha = 2\pi, m \in \mathbb{N}$ feltételnek teljesülnie kell (egy négyzet csúcsánál találkozó többi négyzet elhelyezkedése miatt), továbbá a gömb felszíne a négyzet felszínének egész számú hányada kell legyen: $4\pi = k(4\alpha - 2\pi), k \in \mathbb{N}$. Előbbi egyenletet másodikba helyettesítve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{2} = \frac{2}{m}$$

Az egyenlet megoldásait a pozitív egészek között keressük. Ha $m > 3$, akkor bal oldal nagyobb mint jobb oldal, így nincs megoldás, tehát $m = 1, 2, 3$-at kell vizsgálni, előbbi kettő nem értelmes, $m = 3$ esetén $k = 6$ megoldás. Tehát 6 db egybevágó négyzettel fedhető le a gömb, így a négyzet területe, mellyel lefedhető a gömb: $T = \frac{4\pi}{6} \approx 2.094$.

5. Feladat. *Igazoljuk, hogy a háromszög T területe és a háromszög a, b, c oldalai között fennáll a következő összefüggés:*

$$\tan\frac{T}{2} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}},$$

ahol $s = \frac{a+b+c}{2}$. Kiről nevezték el ezt az összefüggést

Megoldás. *L'Huilier-képlet (α, β, γ a háromszög szögei):*

$$\begin{aligned}\tan\frac{T}{4} = \tan\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4} &= \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\gamma-\pi}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\gamma-\pi}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}} \\ = \frac{\left(\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{c}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\left(\cos\frac{a+b}{2} + \cos\frac{c}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}} &= \frac{2\sin\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}}{2\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-c}{2}}\sqrt{\frac{\sin(s)\sin(s-c)}{\sin(s-a)\sin(s-b)}} = \\ &= \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}\end{aligned}$$

Ahol második, harmadik, ötödik, hatodik egyenlőségek jól ismert trigonometrikus azonosságokból következnek. Negyedik egyenlőségnél azt használtuk, hogy gömbi háromszögekre $\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$ és $\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$ könnyen ellenőrizhető azonosságok. Illetve hatodik egyenlőségnél azt is használtuk, hogy a gömbi esetben a fél-szögekre vonatkozó trigonometrikus összefüggésből következően:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s)\sin(s-c)}{\sin(s-a)\sin(s-b)}}\sin\frac{\gamma}{2}$$