5.házi feladat

2019. december 9.

1. Feladat. *Tekintsük a szfenoid nevű tetraédert (csúcsait két lapjával csatlakozó kocka középpontjai és egy közös élének végpontjai határozzák meg) legyenek a csúcsok:* $(1,0,1)^T, (-1,0,1)^T, (0,1,0)^T, (0,-1,0)^T$. *Írjuk fel a beírt és köréírt gömbjének egyenletét, határozzuk meg a lapszögeit és kitérő éleinek távolságait.*

Megoldás. *Legyenek a csúcsok rendre* A, B, C, D, *illetve* AB, CD *felezőpontjai rendre* $E = (0,0,1)^T, F = (0,0,0)^T$. *Látható, hogy* AB *él felezőmerőleges síkjának és* CD *él felezőmerőleges síkjának metszésvonala* EF. *Tehát a köréírt kör középpontja* EF*-en van, a test szimmetriája miatt láthatóan a felezőpontban, tehát* $O = (0,0,\frac{1}{2})^T$*-ben.*
ACD *és* BCD *lapok szögének szögfelezősíkja, és* ABC *és* ABD *lapok szögének szögfelezősíkja szintén* EF *egyenesben metszik egymást, ez is test szabályosságából látszik. Így itt is látható, hogy* EF*-en lesz a beírt gömb középpontja mely éppen a szakasz felezőpontja lesz, tehát* $O = (0,0,\frac{1}{2})^T$.
A körírt gömb sugara könnyen adódik O*-nak bármelyik csúcstól való távolságát felírva:* $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$, *tehát egyenlete:* $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.
A beírt gömb sugarának meghatározásához határozzuk meg O *távolságát mondjuk* ADC *síktól.* $\overrightarrow{AC} = (-1,1,-1)^T, \overrightarrow{AD} = (-1,-1,-1)^T$, *így a sík normálvektora ezek vektoriális szorzatával párhuzamos:* $\mathbf{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T$. *Ha az* O*-ba muatató vektort levetítjük a sík normálvektorára, majd a kapott vektor hosszát nézzük, akkor éppen* O *távolságát kapjuk a síktól. A két vektor skaláris szorzata:* $< (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T, (0,0,\frac{1}{2})^T >= -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. *Tehát a normálvektorra való vetület:* $(-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4})^T$. *Ennek a vektornak a hossza:* $\frac{1}{2\sqrt{2}} = r$ *a beírt gömb sugara, tehát egyenlete:* $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$.
A test szimmetriája miatt EC *és* ED *vektorok szöge éppen az* AB*-nél és* CD*-nél lévő lapszög, tehát* $90°$, *hiszen ezek a vektorok merőlegesek. A másik lapszög, amely* AC, BC, AD, BD *éleknél van a 2-es feladathoz hasonlóan gömbi geometria segítségével számítható:* $\approx 57,96°$

2. Feladat. *Határozzuk meg a gömbi geometria tételei segítségével a szabályos testek a szabályos testek lapszögeit.*

Megoldás. *Írjunk a testek csúcsaiba egységsugarú gömböket ekkor a gömbök a felületükön szabályos sokszögeket metszenek ki a testekből (annyi oldala van a sokszögnek, ahány lap találkozik egy csúcsban). A szabályos sokszög oldala éppen* *a hozzá tartozó középponti szög, tehát a poliéder oldallapját alkotó szabályos sokszög egy szöge. A keletkező szabályos gömbi sokszög szögei éppen a poliéder lapszögei, ezeket kell meghatározni.*

- *Tetraéder esetén a keletkező szabályos gömbi sokszög háromszög, melynek oldala* $60°$. *Koszinusztétellel adódik a lapszög:*

  $$\cos 60° = \cos 60° \cos 60° + \sin 60° \sin 60° \cos(x)$$

  Ahonnan $x \approx 70,53°$.

- *Kocka esetén a keletkező szabályos gömbi sokszög háromszög, melynek oldala* $90°$. *Koszinusztétellel adódik a lapszög:*

  $$\cos 90° = \cos 90° \cos 90° + \sin 90° \sin 90° \cos(x)$$

  Ahonnan $x = 90°$.

- *Dodekaéder esetén a keletkező szabályos gömbi sokszög háromszög, melynek oldala* $108°$. *Koszinusztétellel adódik a lapszög:*

  $$\cos 108° = \cos 108° \cos 108° + \sin 108° \sin 108° \cos(x)$$

  Ahonnan $x \approx 116,57°$.

- *Oktaéder esetén a keletkező szabályos gömbi sokszög négyszög, melynek oldala* $60°$. *Ha nézzük a négyszög* O *középpontja és két szomszédos csúcsa által meghatározott* OAB *háromszöget, akkor a szimmetria miatt* $AOB\sphericalangle = 90°$, $OA = OB = y$, *a koszinusztételt felírva könnyedén jön, hogy* $y = 45°$, *így a négyszög átlója* $90°$. *A négyszöget az átlójával két háromszögre bonthatjuk, melynek már ismerjük oldalait, így koszinusztételt felírva:*

  $$\cos 90° = \cos 60° \cos 60° + \sin 60° \sin 60° \cos(x)$$

  Ahonnan $x \approx 109,47°$.

- *Ikozaéder esetén a keletkező szabályos gömbi sokszög ötszög, hasonlóan járhatunk el, mint az oktaédernél.* AOB*-re koszinusztétel:*

  $$\cos 60° = \cos y \cos y + \sin y \sin y \cos 72°$$

  Ahonnan $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ *felhasználásával* $y \approx 58,35°$ *adódik. Így* AOB *valamely, nem* O*-nál lévő szögére felírva a koszinusztételt:*

  $$\cos 58,35° = \cos 58,35° \cos 60° + \sin 58,35° \sin 60° \cos(x)$$

  Ahonnan $x \approx 69,23°$ *adódik, így a szimmetria miatt a lapszög ennek a kétszerese lesz, vagyis* $138,46°$.

3. Feladat. *Vetítsük ki a szabályos testeket a köréírt gömbjeikre és határozzuk meg az így keletkezett egybevágó sokszögekből (háromszögekből, négyszögekből illetve ötszögekből) álló gömbi mozaikok egyes sokszögeinek a területeit valamint az azok köré írt körök területeit.*

Megoldás. *A mozaikok szabályos gömbi sokszögeinek területei könnyen meghatározhatók abból, hogy hogy egy csúcsban hány sokszög találkozik. (A gömb sugara legyen egységnyi.)*

- *Tetraédernél három darab egybevágó háromszög találkozik egy csúcsban, így a háromszög szögei* $120°$*-osak, vagyis a terület:* $T = 3\frac{2\pi}{3} - \pi = \pi$.
- *Kockánál három darab egybevágó négyszög talákozik egy csúcsban így a négyszög szögei* $120°$*-osak, vagyis a terület:* $T = 4\frac{2\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3}$.
- *OKtaédernél négy darab darab egybevágó háromszög talákozik egy csúcsban így a háromszög szögei* $90°$*-osak, vagyis a terület:* $T = 3\frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$.
- *Dodekaédernél három darab egybevágó ötszög talákozik egy csúcsban így az ötszög szögei* $120°$*-osak, vagyis a terület:* $T = 5\frac{2\pi}{3} - 3\pi = \frac{\pi}{3}$.
- *Ikozaédernél öt darab egybevágó háromszög talákozik egy csúcsban így a háromszög szögei* $72°$*-osak, vagyis a terület:* $T = 3\frac{2\pi}{5} - \pi = \frac{\pi}{5}$.

Jelölje a mozaikok szabályos gömbi sokszögeinek szögeit α*, ekkor a sokszög* O *középpontját és két szomszédos* A, B *csúcsát tekintve a szimmetria miatt* $BAO\sphericalangle = ABO\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$*, illetve az* O*-nál lévő szög* $\frac{2\pi}{k}$*, ahol* k *a sokszög oldalszáma. Így koszinusztétel alapján (*$R = AO = BO$ *a köréírt kör sugara):*

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{2\pi}{k} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{2\pi}{k}\cos(R) \tag{1}$$

Az α *szögeket már számoltuk, így* R *és a terület is számolható az egyes esetekre:*

- *Tetraéder esetén* $R \approx 70,53°, T = 4,19$
- *Kocka esetén* $R \approx 54,74°, T = 2,66$
- *Oktaéder esetén* $R \approx 54,74°, T = 3,14$
- *Dodekaéder esetén* $R \approx 34,37°, T = 1,29$
- *Ikozaéder esetén* $R \approx 37,38°, T = 1,39$

4. Feladat. (a) *Forgassunk el egy egységnyi élhosszúságú kockát a szemközti lapjait összekötő egyenes körül* $\frac{\pi}{2}$ *szöggel. Számoljuk ki az eredeti és az elforgatott kocka közös részének térfogatát.*

(b) *Forgassunk el egy egységnyi élhosszúságú kockát az egyik testátlója körül* $\frac{\pi}{3}$ *szöggel. Számoljuk ki az eredeti és az elforgatott kocka közös részének térfogatát.*

Megoldás. (a) *Vegyük észre, hogy ez a forgatás éppen önmagába viszi a kockát, tehát a közös rész térfogata* 1.

(b) *Jól látható, hogy az elforgatott kockából az eredeti kocka minden lapja egy teraédert vág le. Hat lap van, így hat darabot. Ha egy ilyen teraéder térfogata V, akkor a kockák közös részének térfogata $1-6V$.*
A tetraéder csúcsai az eredeti kocka egy lapjának egy csúcsa: A, illetve a vele nem szomszédos két lap felezőpontja: B, C, illetve az elforgatott kocka egy csúcsa: D. Tehát ABC háromszög oldalai: $\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. A másik három él is könnyen leolvasható az elforgatott kocka adataiból: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. Tehát ismerjük a tetraéder éleit, így magassága számítható: $m = \frac{1}{3}$. ABC háromszög területe is könnyen számolható: $\frac{3}{8}$. Így a teraéder térfogata: $V = \frac{1}{24}$.
Tehát a két kocka közös részének térfogata: $1 - 6 \cdot \frac{1}{24} = \frac{3}{4}$.

5. Feladat. (a) *Létezik-e olyan egyszerű poliéder, amely lapjainak oldalszámai páronként különbözőek?*

(b) *Van-e olyan, a kockától különböző egyszerű poliéder, melynek ugyanannyi lapja, éle, csúcsa van mint a kockának, de nincs négyszöglapja.*

Megoldás. (a) *Tegyük fel, hogy létezik ilyen poliéder. Legyen ekkor m a poliéder legnagyobb oldalszámú lapjának oldalszáma, illetve legyen l a poliéder lapjainak száma. Az m oldalú lap minden éléhez csatlakozik további lap, így a poliéder lapjainak száma legalább $m+1$, tehát $l \geq m+1$. Ugyanakkor ha l db lap van és azok mind különbözőek m minimális értéke $l+2$ lehet, ugyanis ez akkor valósul meg a lapok oldalszámai: $3, 4, ..., l+2$. Ekkor $m = l+2$, de nyilván ennél csak nagyobb lehet. Így $m \geq l+2$ adódik. Összvetve a két becslést: $l \geq m+1 \geq l+3$ ellentmondás, tehát nem létezik ilyen poliéder.*

(b) *Konvex esetben belátható, hogy nincs ilyen poliéder. Tetszőleges poliéderre, ha összeadjuk a lapokat határoló élek számát, akkor éppen a poliéder éleinek számának kétszeresét kapjuk, hiszen minden élt két lapnál számoltunk, amelyek az adott él mentén érintkeznek. Jelölje e, l a poliéder éleinek, lapjainak számát. Ekkor $l = 6, e = 12$.*
A poliéder lapjainak száma 6, így ahogy (a)-ban láttuk, a legnagyobb élszámú lap élszáma legfeljebb $l - 1 = 5$.
Legyen a poliédernek m db háromszöglapja és $6 - m$ darab legalább ötszög lapja. Ekkor fenti miatt: $3m + (6 - m) = 2e = 24$, ahonnan $3 = m$.
Könnyen látszik tehát, hogy ilyen egyszerű poliéder nem létezik, melynek három darab háromszöglapja és öt darab ötszöglapja van.
Konkáv esetben konstruálható megfelelő poléder.