Differentialgleichungen, Einleitung

In den Differentialgleichungen (Abkürzung DGL) treten nicht nur die gesuchte Funktion, sondern auch einige ihrer Ableitungen auf. Man spricht über eine **gewöhnliche Differentialgleichung**, wenn die gesuchte Funktion y nur von einer reellen Variable x abhängt.
Klassifizierung. Für die Funktion $y(x)$ ist die Gleichung

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad F : D_F \subseteq \mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{R}$$

eine gewönliche DGLn n-ter Ordnung in der **impliziten** Form. In dieser Gleichung treten die Variable x und die gesuchte Funktion y mit deren Ableitungen bis zur n-ten Ordnung auf.
Man spricht über eine **explizite** Form, wenn die DGL die

$$y^{(n)} = \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Form hat.
Definition der Lösung der DGL. Die n-mal differenzierbare Funktion $y : \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ heißt Lösung von

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad \text{oder} \qquad y^{(n)} = \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

wenn sie für alle $x \in \mathbf{I}$ die DGL erfüllt.
Die allgemeine Lösung (falls existiert) ist eine n-parametrische Kurvenschar. Eine spezielle (oder partikuläre) Lösung wird mit Hilfe von **Anfangsbedingungen** berechnet:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots, y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}.$$

Bemerkung. Eine DGL für die Funktion $y(t, x)$ mit zwei (mehreren) Veränderlichen

$$F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial t}, \dots \frac{\partial^n y}{\partial t^n}, \frac{\partial y}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) = 0$$

ist eine **partielle DGL n-ter Ordnung.** Hier treten die partiellen Ableitungen bis zur n-ten Ordnung auf.
Beispiel. Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Polynomiale DGLn beinhalten nur die Potenzen von $y, y', y'', \dots y^{(n)}$. Zum Beispiel

$$y\,y' + y \sin(x) = 0$$

ist eine quadratische gewönliche DGL: polynomial zweiten Grades (erstes Glied).
Lineare DGL: Spezialfall, wenn $n = 1$. Gewönliche, polynomiale DGLn erster Ordnung sind zum Beispiel

$$y' - xy = 0 \qquad \text{und} \qquad y' - e^x y = 0.$$

Diese Gleichungen sind so genannte **homogene** DGLn, weil sie kein Glied beinhalten, das nur von der x Variable abhängt. **Inhomogene** Gleichungen sind zum Beispiel

$$y' - xy = f(x) \qquad \text{und} \qquad y' - y\sin(x) = g(x),$$

Die Funktionen f und g heißen **Störfunktionen**.

Differentialgleichungen erster Ordnung, spez. trennbare Differentialgleichungen

Die Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot g(y)$ für die Funktion $y(x)$ ist trennbar in x und y in dem Sinne, dass in der umgeordneten Form $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$, $(g(y) \neq 0)$ die Veränderlichen getrennt sind.

Satz über Lösbarkeit und Eindeutigkeit.

(1) Wenn $f(x)$ auf $[a, b]$ und $g(y)$ auf $[c, d]$ stetig sind, dann geht mindestens eine Lösung durch jeden Punkt in diesem Rechteck durch.

(2) Wenn $g(y) \neq 0$, dann existiert eine eindeutige Lösung durch jeden Punkt in diesem Rechteck.

Lösungsmethode, Terminologie.

(1) Wenn $g(y) = 0$, dann $y' = 0$, deshalb $y(x) = konst.$ genügt der Differentialgleichung.

(2) Wenn $g(y) \neq 0$, dann nach der Trennung der Veränderlichen führt die Integration beider Seiten $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$ zu der einparametrischen Kurvenschar (im allg.) in der impliziten Form $y(x, c) = 0$ mit dem Parameter $c \in \mathbf{R}$ auf $[a, b]$. Das ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Die Lösungen der DGL heißen Integralkurven.

Partikuläre Lösungen. Zu jedem festgelegten Parameter c gehört eine partikuläre Lösung. Eine partikuläre Lösung wird durch die Anfangsbedingung bestimmt, nämlich, die Kurve soll durch den festgelegten (x_0, y_0) Punkt durchgehen, falls in diesem Punkt die eindeutige Lösbarkeitsbedingung erfüllt ist. Durch Ersetzen dieser Koordinaten in die algemeine Lösung wird der Parameter c bestimmt. Das ist die Lösung des sogenannten Anfangswertproblems (AWP).

Beispiel. Lösung der Differentialgleichung $y' = xy$. Anfangsbedingung: $y(0) = 6$.

$f(x) = x$, $g(y) = y$, beide sind stetig für $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. Wenn $y \neq 0$, $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$ ergibt $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c$, $|y| = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+c}$. Durch Auflösung des Absolutwertes $y = \pm\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^c = k\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$, $k \in \mathbf{R}$.

Nach der Anfangsbedingung $6 = k \cdot 1$, deshalb $y_p(x) = 6\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

Bei der Integration ist $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + \ln c$ auch möglich, dann folgt $|y| = c\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$, wo $c > 0$ ist. Nach der Auflösung des Absolutwertes $y = \pm c\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$, d.h. $y = k\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$, wo $k \in \mathbf{R}$.

Bemerkung.

Bei der Integration wird nur eine Integrationskonstante gewählt in der linken oder rechten Seite der Gleichung. Wenn die Stammfunktion eine Logarithmusfunktion ist, dann kann die Integrationskonstante für $\ln c$ gewählt werden.

Beispiel. Lösung der DGL $y' = -x(y + 1)$. AWP: $y(0) = 1$.

$f(x) = -x$, $g(y) = y + 1$. Wenn $y = -1$, ist das AWP nicht Lösbar. $y = -1$ genügt aber der DGL, denn $(-1)' = 0$, d.h $0 = 0$ gilt. Diese Gerade ist eine singuläre Lösung.

$\int \frac{dy}{y+1} = \int -x\,dx$; $\ln|y + 1| = -\frac{x^2}{2} + \ln c$; $|y + 1| = c\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$; $y + 1 = k\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$; $y(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - 1$ ist die allgemeine Lösung (sehe im Bild 1). Das sind transformierte Gauss-Glocken mit der Asymptote $y = -1$.

Aus der Anfangsbedingung folgt $1 = k\mathrm{e}^0 - 1$; $k = 2$; $y_p(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - 1$.

Graphische Lösung der DGL erster Ordnung, Richtungsfeld, Isoklinen.

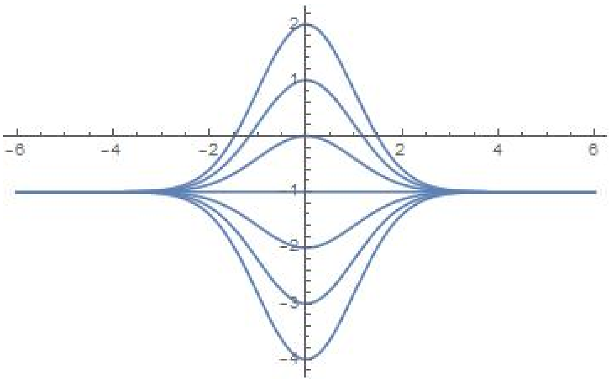
Definition. Die Menge der Tangentensegmenten an die Integralkurven bilden das Richtungsfeld. Die Integralkurven laufen tangential im Richtungsfeld, das ermöglicht die graphische Lösung der DGL.

Definition. Die Menge der Punkte, wo y' konstant ist, ist eine Isokline. Geometrisch betrachtet, in den Punkten einer Isokline sind die Tangentensegmente parallel zu einander, weil der Tangentenanstieg konstant ist.

Definition der orthogonalen Trajektorien. Die orthogonalen Trajektorien einer Kurvenschar schneiden die Elemente der Schar in Rechtswinkel, d.h. die Tangenten der Elemente der zwei Kurvenschare sind orthogonal zu einander im gemeinsamen Punkt.

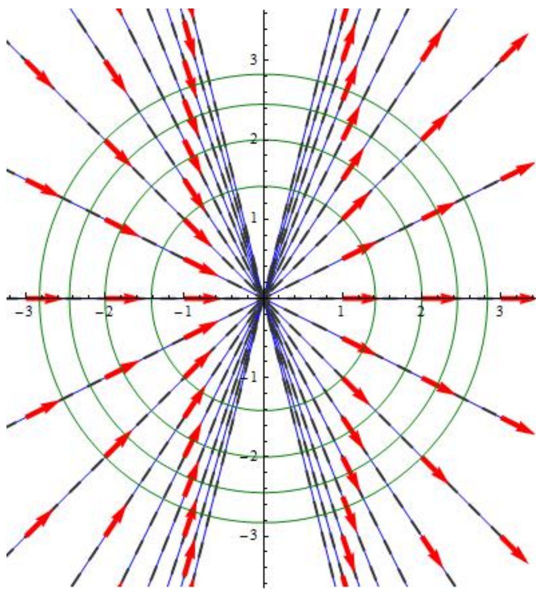
Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien zu den Integralkurven der DGL erster Ordnung $y' = f(x, y)$ ist $-\frac{1}{y'} = f(x, y)$.

Wir werden diese definierten Begriffe speziell für trennbare Differentialgleichungen betrachten.



1. ábra. Die Kurvenschar zeigt die allgemeine Lösung der DGL.

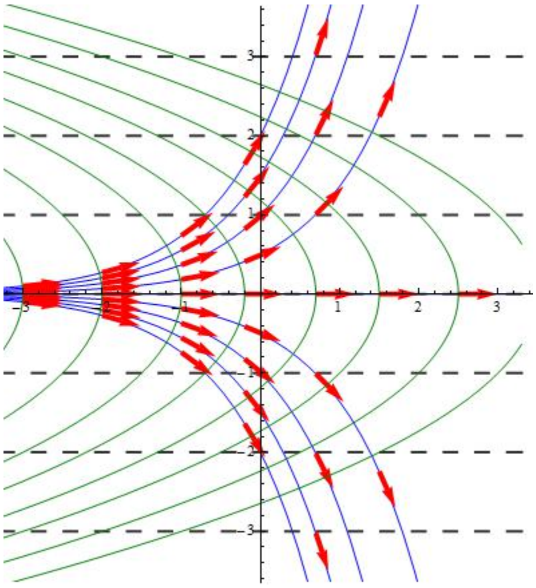
Beispiel. $y' = \frac{y}{x}$
$x \neq 0$. Die Isoklinen sind Halbgeraden aus dem Ursprung ausgehend, denn $y' = c$ führt zu $y = cx$. In den Punkten dieser Geraden sollen die Tangentensegmente mit dem Anstieg c aufgetragen werden. Die Elemente des Richtungsfeldes an einer Isokline entlang liegen deshalb auf derselben Halbgeraden.
$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$, $y = c \cdot x$. Also, die allgeimeine Lösung ist die Geradenschar $y = cx$, $(x \neq 0)$, diese liegen auf den Isoklinen (in diesem Fall speziell).
Die orthogonalen Trajektorien sind die Lösungen der DGL $-\frac{1}{y'} = \frac{y}{x}$. $y' = -\frac{x}{y}$, $\int y dy = \int -x dx$, $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$. Diese sind $y^2 + x^2 = 2c = k$ konzentrische Kreise (sehe im Bild 2).



2. ábra. Geraden in radialen Richtungen und deren orthogonalen Trajektorien: die konzentrischen Kreise.

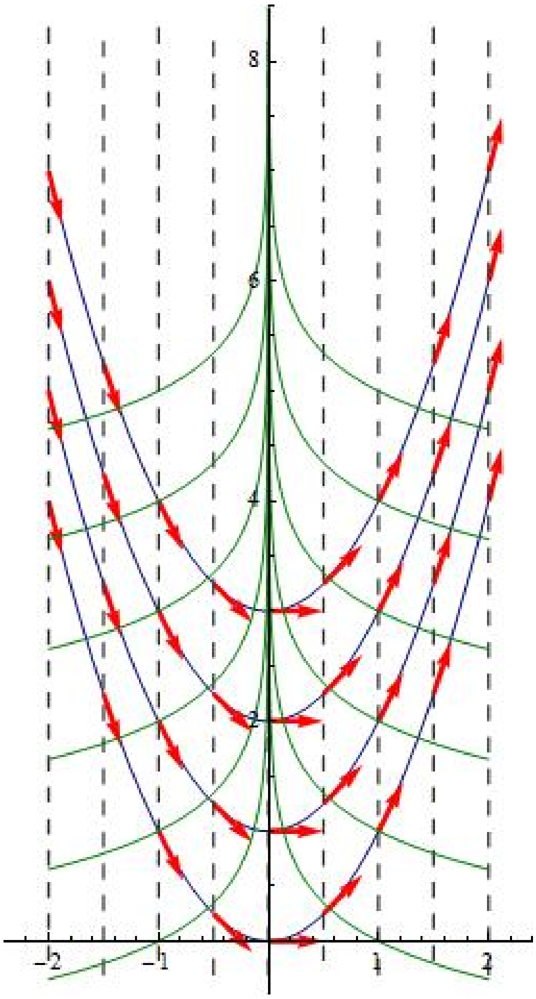
Beispiel. $y' = y$
Die Isoklinen sind horizontale Geraden: $c = y$.
$\int \frac{dy}{y} = \int dx$, $\ln|y| = x + c$, $|y| = \mathrm{e}^{x+c}$. Die allgemeine Lösung ist $y = k\mathrm{e}^x$.

Die orthogonalen Trajektorien sind die Lösungen der DGL $-\frac{1}{y'} = y$, $y' = -\frac{1}{y}$, $\int y dy = \int -dx$. Diese Integralkurven sind $\frac{y^2}{2} = -x + c$ Parabeln (sehe im Bild 3).



3. ábra. Exponentielle Kurven und deren orthogonalen Trajektorien: die Parabeln.

Beispiel. $y' = 2x$
Die integralkurven sind $y = x^2 + c$ Parabeln, was durch direkte Integration zu sehen ist. Die Isoklinen sind senkrechte Geraden. Denn $y' = a$ führt zu $x = \frac{a}{2}$, wo a der angegebene Tangentenanstieg ist. Die y achse ist die Isokline zu $a = 0$, d.h. die Tangentensegmente sind horizontal.
Die orthogonalen Trajektorien sind die Lösungen der DGL $-\frac{1}{y'} = 2x$, $y' = -\frac{1}{2x}$, $y = \int -\frac{1}{2x} dx$, $y = -\frac{1}{2}\ln|x| + c$ (sehe im Bild 4).
Beispiel.
$y' = \sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 0$.
$f(x) = 1$, $g(y) = \sqrt{1-y^2}$. Die allgemeine Lösung ergibt die Integration $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx$, $\arcsin y = x + c$ (sehe im Bild 5). Aus der Anfangsbedingung folgt $c = 0$, $y_p(x) = \sin x$, $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$.
Die Geraden $y = 1$ und $y = -1$ sind singuläre Lösungen, hier ist $g(y) = \sqrt{1-y^2} = 0$. Zu der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ gehört die Integralkurve $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ aus der Lösungsschar, aber die singuläre Lösung $y = 1$ geht auch durch den Punkt $(0, 1)$ durch. Hier gilt die Eindeutigketsbedingung nicht.
Beispiel. $y' = \frac{x(1-y^2)}{y(1-x^2)}$
$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $(x \neq \pm 1)$, $g(y) = \frac{1-y^2}{y}$, $(y \neq 0)$. Singuläre Lösungen sind die Geraden $y = \pm 1$. $\int \frac{y}{1-y^2} dy = \int \frac{x}{1-x^2} dx$, $\ln(1-y^2) = \ln(1-x^2) + \ln c$, $1 - y^2 = c(1-x^2)$, Die allgemeine Lösung ist die Kurvenschar $cx^2 - y^2 = c - 1$, die Hyperbeln und Ellipsen enthält, außerdem die Geraden: für $c = 0$ $y^2 = 1$ und für $c = 1$ $y = \pm x$ (sehe im Bild 6). Die 4 Punkte $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ und $(1, -1)$ sind ausgeschlossen.



4. ábra. Parabelschar und deren orthogonalen Trajektorien.

Exakte Differentialgleichungen.

Wir betrachten die implizite Gleichung $f(x, y(x)) = c$ einer Kurve in der (x, y) Koordinatenebene. Wir differenzieren diese Gleichung nach x so, dass die Funktion f eine Funktion mit zwei Veränderlichen x und y mit den eingebetteten Funktionen $x = x$ und $y = y(x)$ ist. Nach der Kettenregel differenziert bekommt man die Gleichung

$$f'_x + f'_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

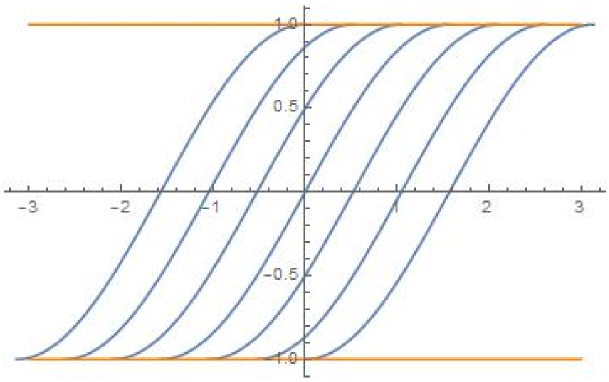
Mit dx formal multipliziert ergibt sich

$$f'_x\, dx + f'_y\, dy = 0.$$

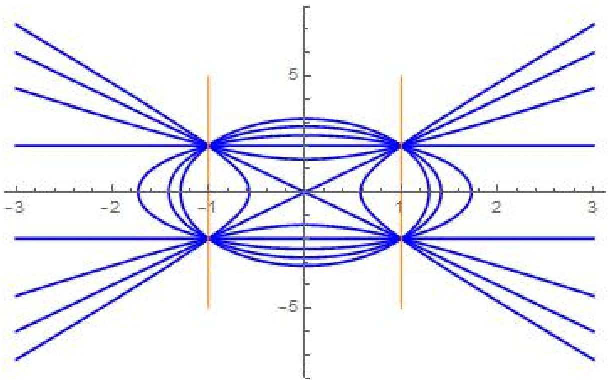
Die umgekherte Frage ist, wenn die Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ gegeben sind so, dass

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

gilt, ob eine Funktion $f(x, y)$ existiert, für die $f'_x = P(x, y)$ und $f'_y = Q(x, y)$.



5. ábra. Sinuskurvensegmente



6. ábra. Kurvenschar mit Ellipsen, Hyperbeln und Geraden.

Definition. Sei auf einem Bereich $B \subseteq \mathbf{R}^2$ $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ stetige Funktionen. Die DGL

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

ist exakt, wenn eine $f : B \to \mathbf{R}$ total differentierbare Funktion gibt, so dass $f'_x = P$ und $f'_y = Q$. In diesem Fall f heißt die Stammfunktion der DGL. Die $y(x)$ Lösungskurven sind in der impliziten Form $f(x, y) = c$ bestimmt als Niveaukurven von $f(x, y)$.

Wenn die zweiten Ableitungen einer $f(x, y)$ Funktion f''_{xy} und f''_{yx} stetig sind, dann $f''_{xy} = f''_{yx}$ gilt. Daher folgt die Bedingung der Lösbarkeit der exakten DGL.

Integrabilitätsbedingug (Exaktheitstest). Seien P und Q partiell stetig differenzierbare Funktionen auf einem Bereich $B \subseteq \mathbf{R}^2$. Die DGL $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ ist exakt, wenn

$$P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$$

$\forall (x, y) \in B$ erfüllt ist.

Bemerkung. Bei einer exakten DGL ist $\underline{v}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld das die Gradientvektoren von $f(x, y)$ enthält. Die $y(x)$ Lösungskurven sind die $f(x, y(x)) = c$ Niveaukurven der Funktion $f(x, y)$, deshalb laufen orthogonal zu den Elementen des Gradientenfeldes.

Lösungsmethode. Die allgemeine Lösung der exakten DGL

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

ensteht durch Integration

$$f(x,y) = \int P(x,y)dx + Y(y),$$

wo $Y(y)$ eine Integrationskonstante ist. Denn y ist bei dieser Integration als konstant betrachtet. $Y(y)$ wird durch Differentiation von f nach y aus der Annahme

$$f'_y = Q(x,y)$$

gesucht. Das ist eine trennbare DGL für $Y(y)$. Die Lösung wird in die letzte Form von $f(x,y)$ eingesetzt. So entstehen die gesuchten Funktionen aus den gegebenen partiellen Ableitungen mit einem Parameter. Die einparametrische allgemeine Lösung der exakten DGL für $y(x)$ entsteht in der impliziten Form $f(x,y,c) = 0$, $c \in \mathbf{R}$.

Beispiel.

$$(3x^2 - 2y)\,dx + (2y - 2x + 6)\,dy = 0.$$

Exaktheitstest:

$$P'_y = -2 = Q'_x \quad \to \quad \text{exakt.}$$

Lösungsverfahren:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int 3x^2 - 2y\,dx = x^3 - 2yx + Y(y) \\ f'_y &= Q(x,y), \qquad \text{so} \\ -2x + Y'(y) &= 2y - 2x + 6 \\ Y(y) &= \int 2y + 6\,dy = y^2 + 6y + c \end{aligned}$$

Die Funktion ist also

$$f(x,y) = x^3 - 2xy + Y(y) = x^3 - 2xy + y^2 + 6y + c$$

Die Lösungskurven sind

$$f(x,y) = k$$

$$x^3 - 2xy + y^2 + 6y + c = k,$$

wo c und k beide reelle Konstante sind. Es sei $C = k - c$. Die Integralkurven entstehen in der impliziten Form

$$x^3 - 2xy + y^2 + 6y = C.$$

Bemerkung. Der erste Schritt in der Lösung kann die Integration von $Q(x,y)$ nach y sein. $f(x,y) = \int 2y - 2x + 6\,dy = y^2 - 2xy + 6y + X(x)$. Aus $f'_x = P$ folgt $-2y + X'(x) = 3x^2 - 2y$. Von hieraus $X(x) = x^3 + c$. $f(x,y) = y^2 - 2xy + 6y + x^3 + c$. Die Lösungskurven sind dieselben $y^2 - 2xy + 6y + x^3 = C$.