Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine gewöhnliche DGL für die Funktion $y(x)$ ist eine lineare DGL erster Ordnung, wenn die Gleichung die Form

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \text{oder} \qquad y' = f(x, y)$$

hat. Im allgemeinen schreiben wir diese Gleichungen in der Form

$$y' + p(x)y = q(x),$$

wo $y(x)$ die gesuchte Funktion und $q(x)$ die Störfunktion sind. Die DGL ist **homogen**, falls $q(x) \equiv 0$. Andernfalls ist die DGL **inhomogen**. Wenn $q(x) \neq 0$, heißt die Gleichung $y' + p(x)y = 0$ die zugeordnete homogene DGL. Falls $p(x) \equiv c \in \mathbf{R}$ eine reelle Konstante ist, spricht man über eine lineare DGL mit konstanten Koeffizientenen.

Satz. (Lösbarkeit) Sei $p(x)$ und $q(x)$ stetig auf dem Intervall $[a, b]$, dann gibt es durch jeden Punkt (x_0, y_0), wo $x_0 \in [a, b]$, eine eindeutige Lösungskurve (Integralkurve) der DGL mit AWP

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad \text{und} \qquad y(x_0) = y_0.$$

Lösungsmethode. Für die inhomogene lineare DGL erster Ordnung

$$y' + p(x)y = q(x)$$

ist die zugeordnete homogene DGL

$$y' + p(x)y = 0.$$

Sei y_{ha} die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen DGL (einparametrische Lösungsschar). Sei y_{ip} eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. So sind die Gleichungen erfüllt:

$$\begin{array}{rcrcl} & & y'_{ha} + p(x)y_{ha} & = & 0 \\ + & & y'_{ip} + p(x)y_{ip} & = & q(x) \\ \hline & & (y_{ha} + y_{ip})' + p(x)(y_{ha} + y_{ip}) & = & q(x). \end{array}$$

Dann erfüllen alle Funktionen $y_{ha} + y_{ip}$ die DGL. Deshalb die allgemeine inhomogene Lösung (y_{ia}) ist gegeben als

$$y_{ia} = y_{ha} + y_{ip}.$$

I. Lösung der zugeordneten homogenen DGL. Sei $q(x) \equiv 0$.

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \qquad \to \text{eine trennbare DGL.} \\ y' &= -p(x)y \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= -p(x) \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int -p(x)dx \quad \text{sei} \quad \int p(x)dx = P(x) + C \quad \text{Stammfunktion} \\ \ln|y| &= -P(x) + C \\ |y| &= e^{-P(x)} \cdot e^C = c\, e^{-P(x)} \quad \text{mit} \quad c = e^C \in \mathbf{R}^+ \end{aligned}$$

Nach der Auflösung des Absolutwertes ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y_{ha} = c\, e^{-P(x)} \quad c \in \mathbf{R}.$$

II. Lösung der inhomogenen DGL: Variation der Konstante. Wir suchen y_{ip} in der Form $c(x) \cdot e^{-P(x)}$. Hier ist $c(x)$ eine Funktion der Variable x.

$$\begin{aligned}
\left(c(x) \cdot e^{-P(x)}\right)' + p(x) \cdot c(x) \cdot e^{-P(x)} &= q(x) \\
c'(x) \cdot e^{-P(x)} + \underbrace{c(x) \cdot (-e^{-P(x)}) \cdot P'(x) + p(x) \cdot c(x) e^{-P(x)}}_{=0} &= q(x), \quad \text{wo} \quad P'(x) = p(x) \\
c'(x) \cdot e^{-P(x)} &= q(x).
\end{aligned}$$

So folgt, dass

$$c(x) = \int q(x) \cdot e^{P(x)} dx.$$

Dann ist eine partikuläre Lösung

$$y_{ip}(x) = \int q(x) \cdot e^{P(x)} dx \cdot e^{-P(x)}.$$

Sei die Stammfunktion $\int q(x) \cdot e^{P(x)} dx = Q(x) + k$, wo $k \in \mathbf{R}$. Wir brauchen jetzt nur eine der Lösungen, so wählen wir $k = 0$.

Beispiel 1.

$$y' - \frac{2}{x} \cdot y = x^2 + 1, \qquad \text{wo} \quad y(1) = 2.$$

I. Lösung der homogenen Gleichung.

$$\begin{aligned}
y' - \frac{2}{x} \cdot y &= 0 \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{2}{x} \\
\ln|y| &= 2 \ln|x| + c \\
|y| &= C \cdot x^2, \quad \text{wo } C \in \mathbf{R}^+ \\
y_{ha} &= \tilde{C} \cdot x^2, \quad \text{hier } \tilde{C} \in \mathbf{R}^{\pm}
\end{aligned}$$

II. Lösung der inhomogenen DGL: Variation der Konstante.

$$\begin{aligned}
y_{ip} &= c(x) \cdot x^2 \\
y' &= c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot 2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c'(x) \cdot x^2 + \underbrace{c(x) \cdot 2x + \frac{-2}{x} \cdot c(x) \cdot x^2}_{=0} &= x^2 + 1 \\
c'(x) &= 1 + \frac{1}{x^2} \\
c(x) &= x + \frac{-1}{x} + k, \quad \text{wo } k = 0 \\
y_{ip} &= x^3 - x
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y_{ia} = \tilde{C} \cdot x^2 + x^3 - x, \quad \text{wo } \tilde{C} \in \mathbf{R}^{\pm}.$$

III. AWP

$$x = 1 \quad \to \quad y_{ia}(1) = \tilde{C} \cdot 1^2 + 1^3 - 1 = 2 \quad \tilde{C} = 2,$$

$$y_{ip}(x) = 2x^2 + x^3 - x.$$

Beispiel 2.

$$y' - \frac{2x}{x^2+1} \cdot y = x^2 + 1.$$

I.

$$\begin{aligned}
y' - \frac{2x}{x^2+1} \cdot y &= 0 \\
\int \frac{1}{y} \cdot y' dx &= \int \frac{2x}{x^2+1} dx \\
\ln|y| &= 2\ln(x^2+1) + c \qquad \text{hier } x^2+1 > 0 \text{ immer} \\
y_{ha} &= C \cdot (x^2+1), \quad \text{ wo } C \in \mathbf{R}^{\pm}.
\end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}
y_{ip} &= c(x) \cdot (x^2+1) \\
y' &= c'(x) \cdot (x^2+1) + c(x) \cdot 2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c'(x) \cdot (x^2+1) + \underbrace{c(x) \cdot 2x + \frac{-2x}{x^2+1} \cdot c(x) \cdot (x^2+1)}_{\text{immer} = 0} &= x^2 + 1 \\
c'(x) &= 1 \\
c(x) &= x. \\
y_{ip} &= x^3 + x.
\end{aligned}$$

So die allgemeine Lösung ist

$$y_{ia} = C \cdot (x^2+1) + x^3 + x, \quad \text{ wo } C \in \mathbf{R}^{\pm}.$$

III.

$$\text{AWP:} \quad y(1000) = 0.$$

$$C \cdot (10^6 + 1) + 10^9 + 10^3 = 0$$

$$C = \frac{-10^9 - 10^3}{10^6 + 1}$$

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung.

Im allgemeinen eine lineare DGL n-ter Ordnung hat die Form

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x).$$

Hier ist die Funktion $y(x)$ eine Lösung auf einem I Intervall, wenn sie der Gleichung für jedes $x \in I$ genügt. Lösbarkeit und Eindeutigkeit der DGL gilt auf I, wenn die $a_i(x)$ Funktionen $\forall i = 0, 1, \ldots n$ auf I stetig sind. Die DGL ist **homogen** falls $f(x) \equiv 0$, andernfalls ist **inhomogen**.
Die allgemeine Lösung falls $n = 1$ ist eine einparametrische Kurvenschar, $\Phi(x, y, c) = 0$ in der impliziten Form. Für $n = 2$ erstellen die Integralkurven eine 2-parametische Kurvenschar $\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0$ etc. Für $n \in \mathbf{N}^+$ $\Phi(x, y, c_1, \ldots c_n) = 0$ ist eine n-parametrische Kurvenschar.
Die zugeordnete homogene Gleichung

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

hat die allgemeine Lösung in der Form

$$y_{ha}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x), \quad \text{wo} \quad c_i \in \mathbf{R},$$

und die Funktionen $y_i(x)$ sind linear unabhängige partikuläre Lösungen der homogenen DGL. Die allgemeine Lösung ist die lineare Kombination der linear unabhängigen partikulären Lösungen.
Definition. $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ Funktionen sind auf einem Intervall I linear unabhängig, wenn $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) = 0$ nur für $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ gilt.
Bedingung der linearen Unabhängigkeit wird durch Differentiation festgestellt. Wir differenzieren diese Gleichung $(n-1)$-Mal.

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) & = & 0 \\ \text{durch Differentiation} & \rightarrow & \\ c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) + \ldots + c_ny_n'(x) & = & 0 \\ c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x) + \ldots + c_ny_n''(x) & = & 0 \\ & \vdots & \\ c_1y_1^{(n-1)}(x) + c_2y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_ny_n^{(n-1)}(x) & = & 0 \end{array}\right\} n \text{ Gleichungen.}$$

Wenn nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ existiert, dann sind die Funktionen linear unabhängig. Also die Determinante von Wronski für jedes $x \in I$

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ & & \vdots & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Man kann zeigen, dass W=0 auch eine hinreichende Bedingung der linearen Unabhängigkeit der Lösungsfunktionen ist. Wenn $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ linear unabhängige partikuläre Lösungen der homogenen DGL sind, dann ist jede lineare Kombination $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$ auch eine Lösung der DGL auf dem Intervall I $\forall c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$. (Zum Beweis soll man diese lineare Kombination in die DGL einsetzen.)
Aussage. Wenn $Y(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL ist, dann hat die allgemeine Lösung die Form

$$y_{ia}(x) = \underbrace{c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)}_{\text{homogene allgemeine Lösung}} + \underbrace{Y(x)}_{\text{inh. part. Lösung}}$$

Wir sagen, dass die DGL konstante Koeffizienten hat, wenn $a_i(x) \equiv a_i \in \mathbf{R}\ \forall i = 0, 1, \ldots n$, d.h.

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{n-1}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x),$$

wo $f(x)$ die Störfunktion ist.

Lineare Diffrerentialgeleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
Spezieller Fall: $n = 2$**.** Eine lineare DGL 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die allgemeine Form

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = f(x), \qquad \text{wo} \quad p, q \in \mathbf{R}.$$

Lösung der homogenen DGL. Sei $y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = 0$. Eine partikuläre Lösung wird in der Form

$$y_1(x) = e^{\lambda x}$$

gesucht. Dann

$$y_1'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \qquad y_1''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Nach substitution

$$\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) = 0.$$

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ heißt die charakteristische Gleichung. Seien die Lösungen der Gleichung λ_1 und λ_2.
Fall 1.: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbf{R}$**.** Die Funktionen $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sind linear unabhängige partikuläre Lösungen, weil

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

So

$$y_{ha}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Fall 2.: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$**.** Die Funktionen $y_1(x) = e^{\lambda x}$ und $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ sind linear unabhängige partikuläre Lösungen. Denn $xe^{\lambda x}$ genügt der Gleichung, und die Determinante $W \neq 0$. So

$$y_{ha}(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}.$$

Fall 3.: $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$**.** Die Lösungsmethode führt hier zu den komplexen Lösungen

$$y_{1,2}(x) = e^{(a \pm ib)x} = e^{ax} e^{\pm ibx} = e^{ax}(\cos(bx) \pm i \sin(bx)).$$

Die reellen Funktionen $\frac{1}{2}(y_1(x) + y_2(x))$ und $\frac{1}{2i}(y_1(x) - y_2(x))$ sind auch Lösungen der Differentialgleichung, und die Determinante $W \neq 0$ gilt auch. Deshalb sind

$$y_1(x) = e^{ax}\cos(bx), \qquad y_2(x) = e^{ax}\sin(bx)$$

für partikuläre Lösungen der homogenen DGL gewählt, deren lineare Kombination

$$y_{ha}(x) = c_1 e^{ax}\cos(bx) + c_2 e^{ax}\sin(bx), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

die allgemeine Lösung ergibt.
Beispiel zum 1-ten Fall

$$y'' - 3y' - 10y = 0, \qquad \to \text{charakteristische Gleichung:} \quad \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0.$$

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -2.$$

$$y_{ha} = c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot e^{-2x}$$

eine zweiparametrische Kurvenshar, d.h. durch jeden Punkt laufen zwei Integralkurven.
Wir wählen die Anfangsbedingungen

$$y(0) = 8, \qquad y'(0) = -2,$$

$$c_1 + c_2 = 8, \qquad 5c_1 - 2c_2 = -2 \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 6.$$

Die entsprechende partikuläre Lösung ist

$$y_{hp} = 2 \cdot e^{-2x} + 6 \cdot e^{5x}.$$

Jetzt schreiben wir Randbedingungen $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ vor:

$$y(0) = 6, \qquad y(1) = 10,$$

$$c_1 + c_2 = 6, \qquad c_1 e^5 + c_2 e^{-2} = 10 \qquad \to c_1, \, c_2.$$

Mit diesen Konstanten ist die partikuläre Lösung bestimmt.

Beispiel zum 2-ten Fall

$$y'' - 8y' + 16y = 0, \qquad \to \text{charakteristische Gleichung:} \quad \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = 4.$$

$$y_{ha} = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot x \cdot e^{4x.}$$

Lösung der inhomogenen DGL

$$y'' - 8y' + 16y = 25\sin(2x).$$

Wir suchen eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL der Störfunktion $f(x) = 25\sin(2x)$ entsprechend in der Form: $Y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$ (Ansatzmethode). Durch Einsetzen dieser $Y(x)$ in die DGL werden die unbekannten A und B berechnet:

$$\begin{aligned} Y'(x) &= -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) \\ Y''(x) &= -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) \end{aligned}$$

Nach der Substitution in der inhomogene DGL:

$$-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) - 16B\cos(2x) + 16A\sin(2x) + 16A\cos(2x) + 16B\sin(2x) =$$

$$= (-12A - 16B)\cos(2x) + (12B + 16A)\sin(2x) = 0 \cdot \cos(2x) + 25\sin(2x)$$

Das Gleichungssystem für A und B ist

$$-12A - 16B = 0 \qquad \text{und} \qquad 12B + 16A = 25.$$

$$\to \quad A = 4 \qquad B = 3.$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist deshalb

$$Y(x) = 3\sin(2x) + 4\cos(x).$$

Die inhomogene allgemeine Lösung hat die Form

$$y_{ia}(x) = y_{ha}(x) + Y(x) = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot x \cdot e^{4x} + 3\sin(2x) + 4\cos(x).$$

Beispiel zum 3-ten Fall: die harmonische Schwingung

$$y'' + a^2 y = 0,$$

homogene lineare DGL zweiter Ordnung. Charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 + a^2 = 0, \quad \text{wo} \quad \lambda_{1,2} = \pm ai \quad \text{(Fall 3.)}$$

$$y_{ha}(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax).$$

Wenn $f(x) \neq 0$ tritt eine Störung auf, z.Bsp.

$$y'' + 4y = x^2.$$

Da x^2 ein quadratisches Polynom ist, wählen wir das Polynom $Y(x) = A + Bx + Cx^2$ als Ansatzfunktion.

$$Y' = B + 2Cx, \quad Y'' = 2C$$

$$2C + 4Cx^2 + 4Bx + 4A = x^2, \quad \to 4A + 2C = 0, B = 0, 4C = 1, \quad \to A, B, C.$$

Mit diesem Ergebnis ist die partikuläre Lösung $Y(x)$ bestimmt.