Integration über ebene Bereiche, das Doppelintegral.

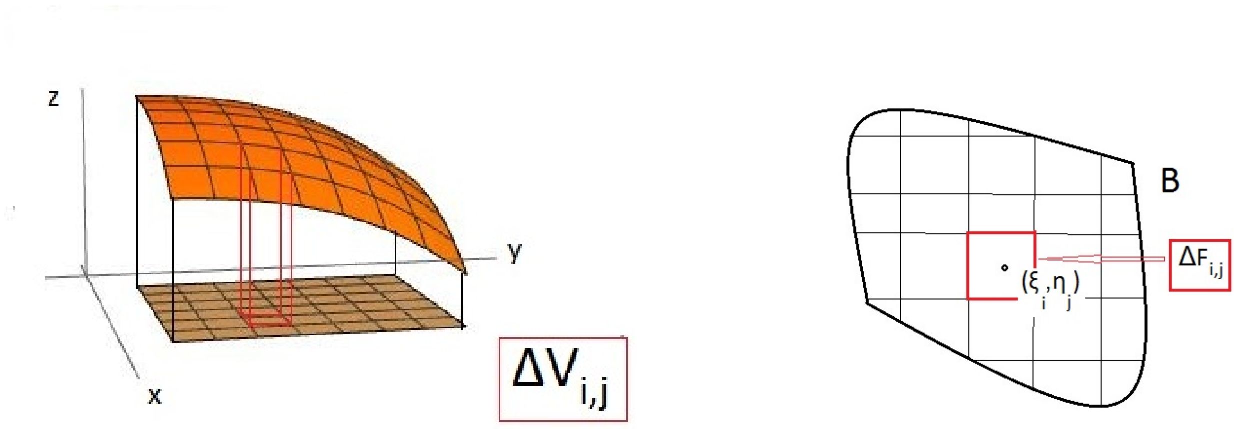
Das Riemann Integral einer Funktion $f(x, y)$ über einen ebenen Bereich B wird eingeführt. Der Bereich soll regulär sein, wie in der Definition angegeben.
Definition. Der ebene Bereich ist regulär, wenn er den folgenden Bedingungen genügt
B ist beschränkt und nicht leer,
B ist abgeschlossen, d,h. er beinhaltet alle Randpunkte,
Der Rand von B besteht aus endlich vielen regulären (stetig differenzierbaren) Kurvenstücken.
Bemerkung. Ein regulärer ebener Bereich hat immer einen Flächeninhalt.
Definition der Riemannschen Summen von $f(x, y)$ über B.
Die Funktion soll auf dem Definitionsbereich beschränkt und auf B stetig sein. Eine Zerlegung des Bereiches wird durch ein Netz glatter Kurven auf Teilbereiche $B_{i,j}$ erzeugt, deren Flächeninhalte $F_{i,j}$ sind. Der Index $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ läuft in einer Kurvenschar des Netzes und $j \in \{1, 2, \ldots m\}$ durch die Andere durch. In jedem Teilbereich wird ein beliebiger innerer Punkt (ξ_i, η_j) gewählt. Mit dem Funktionswert $f(\xi_i, \eta_j)$ wird ein elementares Volumen berechnet: $\Delta V_{i,j} = f(\xi_i, \eta_j)\Delta F_(i, j)$
Die Riemann-Summe zu der Zerlegung ist

$$V_k := \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \Delta V_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta F_{i,j}.$$

Jetzt wird die Zerlegung verfeinert so, dass der maximale Durchmesser $\delta_{i,j}$ der Teilbereiche gegen Null strebt, falls $n \to \infty$ und $m \to \infty$. Der Durchmesser eines Teilbereiches ist mit dem Radius des kleinsten Kreises definiert, der diesen Teilbereich abdeckt. Durch Verfeinerung entsteht eine Zahlenfolge der Riemann-Summen, die unter den vorgeschriebenen Bedingungen konvergiert.
Definition des Doppelintegrals (oder Gebietsintegrals).

$$\iint\limits_{B} f(x, y)dF := \lim_{\substack{n\to\infty,\, m\to\infty,\\ max\{\delta_{i,j}\}\to 0}} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta F_{i,j},$$

wo $(\xi_i, \eta_j) \in B_{i,j}$ und der Elementare Flächeninhalt $\Delta F_{i,j}$ der Flächeninhalt des Teilbereiches $B_{i,j}$ ist.



1. ábra. Integration über ebene Bereiche.

Geometrische Deutung des Doppelintegrals. In den Riemann-Summen sind elementare Teilvolumen $\Delta V_{i,j}$ von Prismen mit dem Basisflächeninhalt $\Delta F_{i,j}$ und mit der Höhe $f(\xi_i, \eta_j)$ summiert, was eine Approximation des Volumens zwischen der Basis B und der Fläche $f(x,y)$ ist. Dementsprechend stellt das Integral

$$\iint\limits_B f(x,y)dF, \quad f(x,y) \geq 0,\ (x,y) \in B$$

das Volumen des geraden zylindrischen Körpers mit Basisfläche B und Deckfläche $f(x,y)$ dar.
Geometrische Deutung im Spezialfall $f(x,y) \equiv 1$. In diesem Fall ist das Volumen des zylindrischen Körpers mit der konstanten Höhe 1 numerisch gleich mit dem Flächeninhalt F der Basisfläche

$$\iint\limits_B dF = F.$$

Rechenregeln.
Linearität: $\iint_B \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)dF = \alpha \iint_B f(x,y)dF + \beta \iint_B g(x,y)dF$
Monotonie: Wenn $g(x,y) \leq f(x,y)$ dann $\iint_B g(x,y)dF \leq \iint_B f(x,y)dF$
Additivität: Wenn $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \{\}$, dann $\iint_B fdF = \iint_{B_1} fdF + \iint_{B_2} fdF$.
Mittelwertsatz. Wenn B ein regulärer Bereich ist, dann gibt es zu jeder stetigen Funktion einen Punkt $(x^\star, y^\star) \in B$ mit

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dF = f(x^\star, y^\star) \cdot F,$$

wo F der Flächeninhalt von B ist.
Bemerkung. In der Definition ist es erlaubt, dass die Funktion $f(x,y)$ über endlich vielen Kurven im Bereich nicht stetig ist. In diesem Fall wird der Bereich bei der Berechnung entlang dieser Kurven aufgespaltet.
Die Berechnung des Doppelintegrals in kartesischen Koordinaten.
Bei der Zerlegungdes Bereiches B mit achseparallelen Geraden entstehen Rechtecke mit Seitenlängen Δx, Δy und Flächeninhalt $\Delta F = \Delta x \cdot \Delta y$, dann schreibt man

$$\int\int_B f(x,y)\,dxdy := \iint\limits_B f(x,y)\,dF.$$

Der Satz von Fubini: Integration über ein Rechteck.
Wenn der Bereich achsenparallele Seiten hat mit den Seitenlängen $a \leq x \leq b$ und $c \leq y \leq d$, dann wird das Doppelintegral mit zweifacher Integration berechnet, und die Integrationsreihenfolge ist vertauschbar.

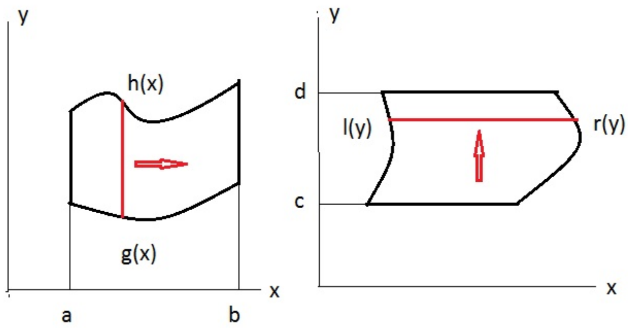
$$\int\int_B f(x,y)\,dxdy := \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Beispiel. Die Funktion $f(x,y) = x \sin y$ wird auf dem Bereich $B : -2 \leq x \leq 5$, $-\pi \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ integriert.
$\iint_B x \sin y\, dF = \int_{y=-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{x=-2}^{5} x \sin y\, dx\right) dy = \int_{y=-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin y \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5 dy = \int_{y=-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{21}{2} \sin y\, dy = \frac{21}{2} \left[-\cos y\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -10,5$. Oder $\int_{x=-2}^{5} x \left[-\cos y\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{5} = -10,5$.
Integration über Normalbereiche.
Definition. Ein regulärer Bereich nennt man einen Normalbereich bezüglich x, wenn es auf $[a,b]$ $g(x)$ und $h(x)$ stetig differenzierbare Funktionen gibt mit $g(x) \leq h(x)$ und

$$B_x = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

Ein Normalbereich bez̈uglich y hat die Form

$$B_y = \{(x,y) : l(y) \leq x \leq r(y),\ c \leq y \leq d\},$$



2. ábra. Normalbereiche.

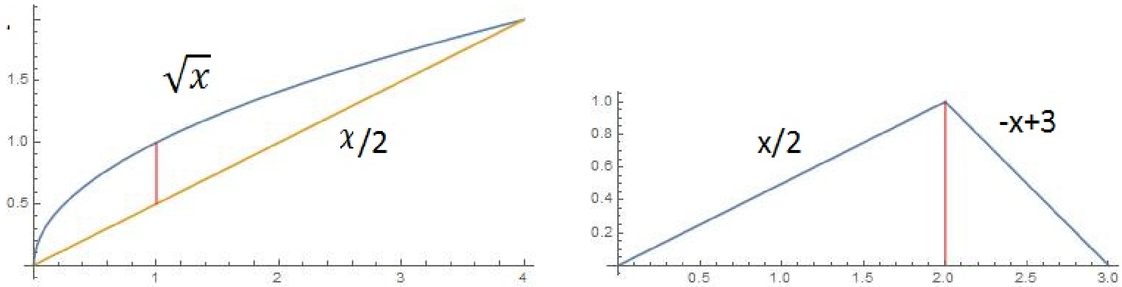
wo $c < d$ und $l(y)$, $r(y)$ stetig differenzierbare Funktionen sind mit $l(y) \leq r(y)$ (siehe Bild 2).
Das Doppelintegral einer stetigen Funktion über den Normalbereich wird mit zweifacher Integration berechnet

$$\iint\limits_{B_x} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

$$\iint\limits_{B_y} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{l(y)}^{r(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Warnung. Das äussere Integral hat immer konstante Grenzen!
Beispiel. $f(x,y) = x^2 + y^2$ wird auf dem Bereich zwischen der Parabel $y = \sqrt{x}$ und der Geraden $y = \frac{1}{2}x$ integriert (siehe im Bild 3). Zu jedem festgelegten x gilt $\frac{1}{2}x \leq y \leq \sqrt{x}$. Dann wird das Stäbchen in der x-Richtung auf dem Intervall zwischen den Schnittpunkten geschoben. Die Schnittpunkte sind im $x = 0$ und $x = 4$. Der Normalbereich ist durch $\frac{1}{2}x \leq y \leq \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ bestimmt. $\iint_B (x^2+y^2)dF = \int_{x=0}^4 \left(\int_{y=\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)dy \right) dx = \int_0^4 \left[x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^4 x^2\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}^3}{3} - (x^2\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}x)^3)dx = \ldots$
Die Klammern und die x und y in den Integrationsgränzen werden im Späteren weggelassen. dx und dy sollen in der Reihenfolge stehen, als ob die Klammern gesetzt wären.
Dieser Bereich ist ein Normalbereich auch bezüglich y, dann zu einem fstgelegten y im $[0,2]$ läuft x von der linken Parabel $x = y^2$ bis zur Geraden $x = 2y$ rechts, also $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (x^2+y^2)dx\, dy = \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + y^2x \right]_{y^2}^{2y} dy = \int_0^2 \left(\frac{8y^3}{3} + 2y^3 - (\frac{y^6}{3} + y^4) \right) dy = \ldots$
Beispiel. Man integriere die Funktion $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$ auf dem Dreiecksgebiet, das von den Geraden $y_1 = \frac{1}{2}x$, $y_2 = -x+3$ und von der x Achse begrenzt ist (siehe im Bild 3).
Wenn wir den Bereich mit Strecken ausfüllen, die parallel zu der y Achse sind, dann sollen wir das Dreieck zerlegen. In diesem Fall $\int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}x} \mathrm{e}^{x+y}\, dy\, dx + \int_2^3 \int_0^{-x+3} \mathrm{e}^{x+y}\, dy\, dx$ ergibt das Ergebnis.
Wir integrieren in der umgekehrten Reihenfolge so, dass wir das Dreieck mit horizontalen Strecken ausfüllen, dann läuft x zu jedem festgelegten y von der linken Geraden $x = 2y$ bis zur rechten Geraden $x = 3 - y$, $\int_0^1 \int_{2y}^{3-y} \mathrm{e}^{x+y}\, dx\, dy = \int_0^1 [\mathrm{e}^{x+y}]_{x=2y}^{3-y}\, dy = \int_0^1 (\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{3y})dy = \frac{2}{3}\mathrm{e}^3 + \frac{1}{3}$.
Beispiel. Man berechne das Doppelintegral durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\int_0^1 \int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\, dx\, dy.$$



3. ábra. Bereiche in den Beispielen.

Da e^{x^2} mit elementaren Funktionen nicht integrierbar ist, müssen wir in der anderen Reihenfolge das Integral aufstellen. Der Bereich ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$., der ist jetzt mit horizontalen Strecken ausgefüllt. Die senkrechten Strecken zu jedem festgelegten x liegen zwischen der x Achse und der Geraden $y = x$. Dann schiebt man diese Strecke in der x Richtung von 0 bis 1 durch. Die Lösung ist $\int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \left[y e^{x^2} \right]_{y=0}^{x} dx = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$.

Der Schwerpunkt eines ebenen Gebiets.

Ein ebenes Gebiet, als eine dünne Platte kann mit homgenem oder mit inhomogenem Material ausgefüllt werden. Das inhomogene Material wird durch eine Massendichtefunktion $\mu(x,y)$ beschrieben. Die Gesammtmasse wird mit der Summe der elementaren Flächeninhalte multipliziert mit dem Wert von $\mu(x,y)$ in einem inneren Punkt des entsprechenden Teilbereiches, so entsteht eine Integralsumme von $\mu(\xi_i, \eta_j)\Delta F_{i,j}$, deren Folge konvergiert bei der Verfeinerung der Zerlegung des Bereiches und der Grenzwert stellt die Gesammtmasse dar:

$$M = \iint\limits_B \mu(x,y) dF.$$

Die axialen Momemente sind

$$M_x = \iint\limits_B x\mu(x,y) dF, \quad M_y = \iint\limits_B y\mu(x,y) dF.$$

Der Schwerpunkt der dünnen Platte ist

$$S(x_s, y_s): \quad x_s = \frac{M_x}{M}, \quad y_s = \frac{M_y}{M}.$$

Der geometrische Schwerpunkt.

Wenn die dünne Platte, d.h der ebene Bereich aus homogenem Material gefertigt ist, dann ist die Massendichtefunktion konstant, $\mu(x,y) \equiv 1$ auf B. In diesem Fall

$$S(\bar{x}, \bar{y}): \quad \bar{x} = \frac{1}{F} \iint\limits_B x\, dF, \quad \bar{y} = \frac{1}{F} \iint\limits_B y\, dF,$$

wo F der Flächeninhalt des Bereiches ist, $F = \iint_B 1 \cdot dF$.

Beispiel. Der ebene Bereich ist durch die Parabel $y = x^2$ und die Strecke $y = 1$ auf dem Intervall $-1 \le x \le 1$ begrenzt. Man bestimme die Koordinaten des geometrischen Schwerpunktes.

Wegen Symmetrie liegt der Schwerpunkt auf der y Achse, $S(0, \bar{y})$. Der Flächeninhalt $F = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 1\, dy\, dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$. Die erste Integration führt zu der bekannten Formel, wie der Flächeninhalt zwischen zwei Kurven mit einfachem Integral berechnet wird.

$M_y = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} y\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{5}$. $\bar{y} = \frac{M_y}{F} = \frac{3}{5}$, $S(0, \frac{3}{5})$.

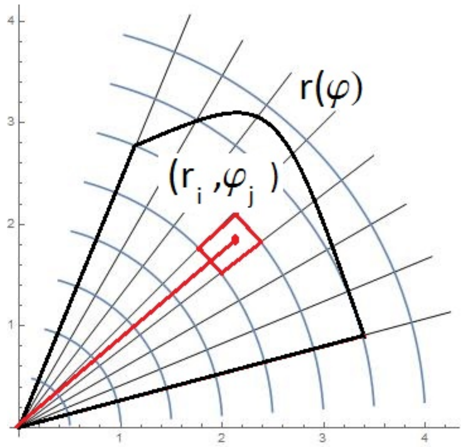
Schwerpunkt des speziefischen Normalbereiches, der zwischen x Achse und einer Kurve $g(x) \geq 0$ auf dem Intervall $[a, b]$ liegt. $B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq g(x),\ a \leq x \leq b\}$

$$F = \int_a^b g(x)dx, \quad \bar{x} = \frac{1}{F}\int_a^b \int_0^{g(x)} x\,dy\,dx = \frac{1}{F}\int_a^b x \cdot g(x)\,dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{F}\int_a^b \int_0^{g(x)} y\,dy\,dx = \frac{1}{F}\int_a^b \frac{1}{2}\left(g(x)\right)^2 dx.$$

Integraltransformation in Polarkoordinaten.

Im Polarkoordinatensystem ist jeder Punkt mit dem Radius r und Polarwinkel φ definiert: $P(r, \varphi)$. Die Transformation in das Karthesische Koordinatensystem lautet $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Der reguläre Sektorbereich (im Bild 4) ist durch eine stetig differenzierbare Kurve $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ und zwei Radien $\varphi = \alpha$ und $\varphi = \beta$ berandet. Dieser Bereich wird durch Geraden in den Radiusrichtungen und Kreisbögen aufgeteilt. In jedem Elementarbereich wird ein innerer Punkt mit Koordinaten (r_i, φ_j) gewählt. Der Flächeninhalt $\Delta F_{i,j}$ des Elementarbereiches wird mit den Seitenlängen $r_i \cdot \Delta\varphi_j$ und Δr_i approximiert: $\Delta F_{i,j} = r_i \cdot \Delta r_i \cdot \Delta\varphi_j$.



4. ábra. Sektorbereich.

Auf dem Bereich definierte stetige Funktion sei $f(x, y)$, die in Polarkoordinaten transformiert wird. Die Integralsumme bei einer Zerlegung des Bereiches ist

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(r_i\cos\varphi_j, r_i\sin\varphi_j) r_i \Delta r_i \Delta\varphi_j$$

Bei der Verfeinerung der Zerlegung, wo $n \to \infty$, $m \to \infty$ und der maximale Durchmesser der Elementarbereiche gegen 0 strebt, konvergiert die Folge der Integralsummen gegen

$$\iint_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr\, d\varphi.$$

Warnung. In der Integraltransformation ist also nicht nur x und y in Polarkoordinaten umgeschrieben, sondern $dx\,dy$ wird in $rdr\,d\varphi$ transformiert.

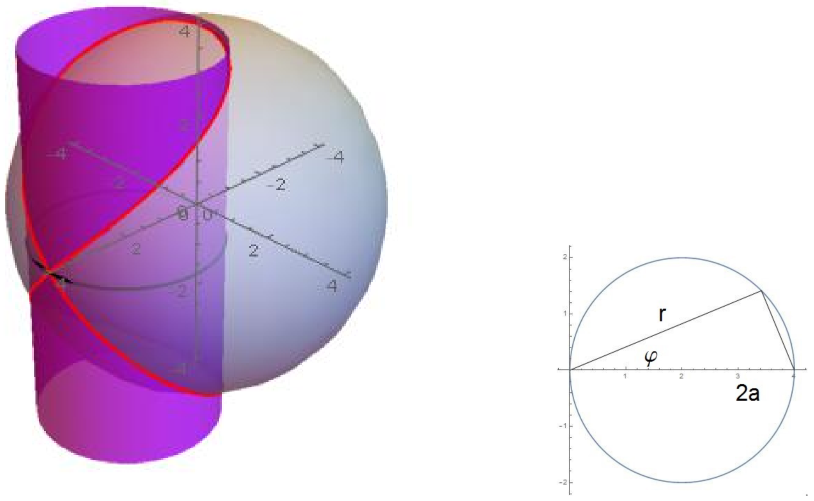
Beispiel. Das Volumen der Kugel.

Wir betrachten die obere Halbkugelfläche, gegeben durch $f(x, y) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$. Diese Funktion wird über dem Kreisbereich in der xy Ebene $x^2 + y^2 = R^2$ integiert. Im Polarkoordinatensystem $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi +$

$r^2 \sin^2 \varphi = r^2$. Die Funktion in Polarkoordinaten hat die Form $\sqrt{R^2 - r^2}$. Der Kreisbereich ist $K = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Das Volumen der Halbkugel wird mit dem folgenden Doppelintegral berechnet:

$$\frac{V}{2} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \sqrt{R^2 - r^2} r \, dr \, d\varphi = -\frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \right]_0^R = \frac{1}{3} R^3 \cdot 2\pi = \frac{2R^3\pi}{3}.$$

Beispiel. Das Volumen des Viviani-Körpers.
Die Viviani-Kurve ist die Schnittkurve der Kugelfläche $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$ und der Zylinderfläche $(x-a)^2+y^2 = a^2$. Diese Kurve berandet auf der Kugelfläche einen zylindrischen Körper mit senkrechten Mantellinien (sehe im Bild 5). Dieser Körper ist symmetrisch auf der xy Ebene, deshalb betrachten wir den oberen Halbkörper. Die Funktion, die die Deckfläche deiniert, ist die obere Kugelfläche $f(x, y) = \sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}$, der Integrationsbereich ist der Basiskreis des Kreiszylinders, dessen Randkreis in Polarkoordinaten $r(\varphi) = 2a \cos \varphi$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{pi}{2}]$ ist. Der Kreisbereich ist demensprechend $K = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$.



5. ábra. Der Viviani-Körper und der Integrationsbereich.

$$\frac{V}{2} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{2a\cos\varphi} \sqrt{4a^2 - r^2} \, r \, dr \, d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{(4a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{2\frac{3}{2}} \right]_0^{2a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3} 8a^3 \sin^3 \varphi + \frac{1}{3} 8a^3 \right) d\varphi = \frac{8}{3} a^3 \pi - \frac{8}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi.$$

Das letzte Integral$=\frac{4}{3}$, deshalb $\frac{V}{2} = \frac{8a^3}{3}(\pi - \frac{4}{3})$.
Beispiel. Die Funktion $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ wird über den Kreisring integriert, der durch die Kreise mit Radius$=1$ und Radius$=2$ berandet ist, mit dem Mittelpunkt im Ursprung.

Der Bereich zwischen den beiden Kreisen ist in Polarkoordinaten dargestellt: $B = \{(r, \varphi) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Die Funktion in Polarkoordinaten ist $\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}$.

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} \, r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[(r^2+1)^{\frac{1}{2}} \right]_1^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} (\sqrt{5} - \sqrt{2}) \, d\varphi = (\sqrt{5} - \sqrt{2}) 2\pi.$$