Fourier-Reihen

Die Fourier-Reihen ermöglichen die Darstellung periodischer Funktionen in der Form trigonometrischer Funktionenreihen. Eine trigonometrische Funktionenreihe

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ist eine lineare Kombination der Basisfunktionen $\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos kx, \sin kx,\ k = 1, 2, \ldots$ des nach 2π-periodischen Funktionenraumes. Dieser Raum ist ein unendlich dimensionaler "abstrakter Vektorraum", wo die Operationen Addition und das Skalarvielfache für jedes Paar der Raumelemente mit den bekannten Eigenschaften definiert sind. Das Skalarprodukt zweier Basisfunktionen $e_n(x)$ und $e_m(x)$ ist mit dem Integral $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e_n(x) \cdot e_m(x)\, dx$ definiert. Mit diesem Skalarprodukt sind die Basisvektoren paarweise orthogonale Einheitsvektoren, d.h.

$$< e_n(x), e_m(x) >= \begin{cases} 1, & \text{falls}\, n = m \\ 0, & \text{falls}\, n \neq m \end{cases}.$$

Diese Aussage wird mit Berechnung der folgenden Integrale bewiesen:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos nx)(\cos mx) dx = \begin{cases} 1, & \text{falls}\, n = m \\ 0, & \text{falls}\, n \neq m \end{cases}, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin nx)(\sin mx) dx = \begin{cases} 1, & \text{falls}\, n = m \\ 0, & \text{falls}\, n \neq m \end{cases},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin nx)(\cos mx) dx = 0.$$

Zu der Integration sollen die Produkte auf Summen umgeformt werden, z.B $(\cos u)(\cos v) = \cos(u+v) + \cos(u-v)$, usw. Wenn eine Basisfunktion $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, dann ist die Integration trivial.
Aussage. Es sei $f(x) = f(x + 2k\pi)$, $k = 1, 2 \ldots$ eine integrierbare, nach 2π periodische Funktion, dann ist die Fourier-Reihe von $f(x)$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (*)$$

mit den Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx.$$

Beweis. Wir berechnen die Koeffizienten mit Berücksichtigung der Orthogonalität der Basisfunktionen. Wir nehmen an, dass die Fourier-Reihe die Funktion auf dem 2π-Intervall darstellt, d.h. die Formel (*) eine Gleichung ist. Zuerst integrieren wir beide Seiten der Gleichung (*). So werden wir a_0 bekommen. $\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dx = a_0$, denn das Integral der cosinus und sinus Glieder von 0 bis 2π ist Null.
Für Berechnung der Koeffizienten a_k multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit $\cos kx$, dann integrieren wir gliedweise.

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx\, dx + \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_l \cos lx \cdot coskx\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} b_l \sin lx \cdot \cos kx\, dx$$

Da $\int_0^{2\pi} coslx \cdot coskx\, dx$ für $l = k$ den Wert π, sonst 0 hat, und $\int_0^{2\pi} sinlx \cdot coskx\, dx = 0$, $\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx = a_k \pi$, woher a_k tatsächlich mit dem Integral ausgedückt ist , wie behauptet. Zur Berechnung der Koeffizienten b_k wird die Gleichung (*) mit $\sin kx$ multipliziert und integriert. Aus der Summe bleibt nur ein Glied, $b_k \pi$, woher die Behauptung folgt.

Darstellungssatz der Fourier-Reihe. Wenn $f(x)$ und $f'(x)$ 2π-periodisch und mit Ausnahme von endlich vielen Punkten auf dem Intervall $(0, 2\pi)$ stetig sind, dann die Fourier-Reihe ergibt in jedem Punkt den Wert $\frac{1}{2}(\lim_{x^-} f(x) + \lim_{x^+} f(x))$.
Bemerkung. Nach dem Satz ist der Grenzwert der unendlichen trigonometrischen Reihe an jeder Stelle der Mittelwert der linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwerte der Funktion, was der Funktionswert ist, wo die Funktion stetig ist. Aber in Sprungstellen wird kein Funktionswert wiedergegeben, deshalb steht in der Definition $\approx$ statt $=$.
Bemerkung. Die Integrationsgrenzen können mit einem beliebigen c verschoben werden, d.h. statt $\int_0^{2\pi}$ kann man die Grenzen $\int_c^{c+2\pi}$ wählen.
Die Koeffizienten für gerade und ungerade Funktionen. Wählt man das Integrationsintervall $[-\pi, \pi]$, dann ist das Integral einer ungeraden Funktion 0, und das Integral einer geraden Funktion das zweifache des Integrals auf dem halben Integral berechnet. Deshalb gilt
für gerade Funktionen

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = 0.$$

für ungerade Funktionen

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Denn eine gerade Funktion mit einer ungeraden multipliziert ergibt eine ungerade Funktion und zwei geraden, bzw. zwei ungeraden Funktionen multipliziert ergibt eine gerade Funktion. Offensichtlich besteht die Fourier-Reihe einer geraden Funktion aus geraden Glieder (konstante und $\cos kx$) und einer ungeraden Funktion aus ungeraden Glieder ($\sin kx$).
Beispiel. Die Sägezahnfunktion $f(x) = x$, wenn $x \in (-\pi, \pi]$ und $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $k = 1, 2, \ldots$.
Die Funktion $f(x)$ ist ungerade, deshalb $a_0 = 0$ und jeder $a_k = 0$. $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx\,dx$. Bei der partiellen Integration wird $u = x$ und $v' = \sin kx$ gewählt.

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k}\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos k\pi}{k}\right) = \frac{-2}{k}(-1)^k,$$

denn $\cos k\pi = (-1)^k$. Die Fourier-Reihe ist daher

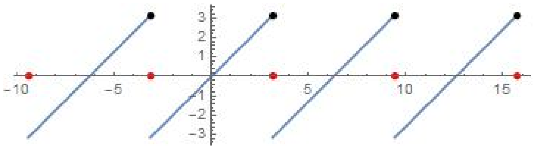
$$f(x) \approx 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{2}{4}\sin 4x + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin kx.$$

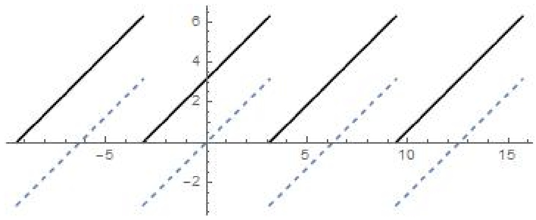
In den Sprungstellen, $x = \pi + 2k\pi$ ergibt die Reihe die 0, sonst den Funktionswert.
An der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$, wo $f(x)$ stetig ist, bekommen wir die Darstellung von π durch eine Leibniz-Reihe, denn

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$$

.
Beispiel. $f(x) = x + a$, wenn $x \in (-\pi, \pi]$ und $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $k = 1, 2, \ldots$. Das ist die Sägezahnfunktion in der y-Richtung verschoben. Diese Funktion ist weder gerade, noch ungerade. So müssten alle Koeffizienten berechnet werden. $f(x) - a$ ist aber ungerade. Diese wird in der Fourier-Reihe entwickelt, und nacher zurückverschoben durch die Addition a zu der Reihe. Im Bild ist $a = \pi$.
Beispiel. $f(x) = x^2$, $-\pi < x \le \pi$, $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $k = 1, 2, \ldots$
Die Funktion besteht aus Parabelstücken, sie ist nach 2π periodisch, stetig und gerade. Deshalb sind die Koeffizienten b_k alle Null. Az a_0 und a_k Koeffizienten integrieren wir auf dem halben Intervall und multiplizieren wir mit 2.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$$





1. ábra. nach 2π periodische Sägezahnfunktion und nach Verschiebung

Mit partieller Integration

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\left[x^2\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin kx}{k}\, dx\right]$$

Das erste Glied ist Null, und wir integrieren nochmals partiell.

$$a_k = \frac{4}{\pi}\left[\left[x\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k^2}\, dx\right] = \frac{4}{\pi}\left(\pi\frac{(-1)^k}{k^2} + 0\right)$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \frac{4}{2^2}\cos 2x - \frac{4}{3^2}\cos 3x + \ldots$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots = 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}.$$

Diese Reihe ist eine absolut konvergente Leibniz-Reihe.

Der allgemeine Fall: Funktionen mit der Periode $2l$.

Durch die Substitution $x \Rightarrow \frac{\pi}{l}x$ wird das Intervall $2l$ in 2π transformiert. Dementsprechend werden die Berechnungsformel der Koeffizienten umgerechnet. Die Darstellungssatz gilt auch für das $2l$-Periode.

Für die integrierbare, nach $2l$ periodische Funktion ist die Fourier-Reihe

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\frac{\pi}{l}x + b_k \sin k\frac{\pi}{l}x)$$

mit den Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\, dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos(k\frac{\pi}{l}x)\, dx, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin(k\frac{\pi}{l}x)\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Bei den geraden und ungeraden Funktionen ist die Berechnung kürzer. In der Fourier-Reihe der geraden Funktionen sind die Koeffizienten $b_k = 0$, bei den ungeraden sind a_0 und a_k alle 0. Ausserdem integrieren wir auf dem halben Intervall.

Beispiel. $f(x) = |x| - 1$; $-1 \le x \le 1$, $f(x+2) = f(x)$. Die periode ist 2, also $l = 1$. Die Funktion ist gerade, deshalb treten nur die Koeffizienten a_0 und a_k, $k = 1, 2, \ldots$ in der Fourier-Reihe auf.

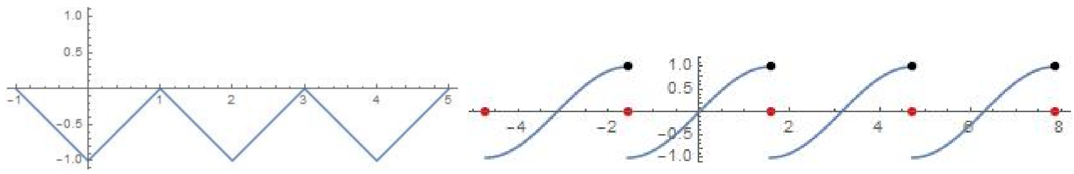
$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 (x-1)dx = \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2},$$

$$a_k = \frac{2}{1}\int_0^1 (x-1)\cos\frac{k\pi}{1}x\, dx = 2\left[(x-1)\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\, dx = 2\left[\frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2}\right]_0^1 = \frac{2}{k^2\pi^2}((-1)^k - 1).$$

Partielle Integration haben wir durchgeführt, wo $u = x - 1$ und $v' = \cos k\pi x$. Hier fallen die Glieder für gerade k Werte aus, sie sind nur für die ungeraden ungleich Null, deshalb schreiben wir das allgemeine Glied mit $k = 2p - 1$, $p = 1, 2, \dots$ auf.

$$f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(2p-1)\pi x}{(2p-1)^2} = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\pi x - \dots$$

Da die Funktion stetig ist, wird sie an jeder Stelle durch die Fourier-Reihe dargestellt.



2. ábra. nach $2p$ periodische Funktionen

Beispiel. $f(x) = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$, $f(x + k\pi) = f(x)$. Die Funktion ist ungerade, deshalb ist $a_0 = 0$, und $a_k = 0$, $(k = 1, 2, \dots)$, $2l = \pi$, $l = \pi/2$.

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2kx\, dx,$$

Nach der Identität $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$

$$b_k = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos(2k-1)x - \cos(2k+1)x)\, dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} \right]_0^{\pi/2} \right)$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1} - \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1} \right).$$

$b_1 = \frac{2}{\pi}(\frac{1}{1} + \frac{1}{3})$, $b_2 = \frac{2}{\pi}(\frac{-1}{3} - \frac{1}{5})$, $b_3 = \frac{2}{\pi}(\frac{1}{5} + \frac{1}{7})$, $b_4 = \frac{2}{\pi}(-\frac{1}{7} - \frac{1}{9})$,

$$f(x) \approx \frac{2}{\pi} \left\{ (\frac{1}{1} + \frac{1}{3}) \sin 2x + (\frac{-1}{3} - \frac{1}{5}) \sin 4x + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7}) \sin 6x + (-\frac{1}{7} - \frac{1}{9}) \sin 8x + \dots \right\}$$