

Fourier - integrál

periodikus függvények Fourier sorfejtése $\rightarrow$ nem periodikus függvényekre

Fourier sor konvergenciájának elégséges feltétele:

ha f integrálható és az x pontban tetszőleges $\delta > 0$ -ra

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt \text{ létezik, akkor a Fourier-sor } s_n \text{ részletösszege az } x$$

pontban $f(x)$ -hez konvergál.

Legyen f integrálható a $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ intervallumon, és $\forall x$ -ben teljesüljön a konvergencia feltétel, akkor

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{2\pi}{T} x + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} x \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \omega x + b_k \sin k \omega x); \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{ahol } a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k \omega t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k \omega t dt$$

az egyenletek behelyettesítésével

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k \omega t \cdot \cos k \omega x dt + \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k \omega t \sin k \omega x dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) [\cos k \omega t \cos k \omega x + \sin k \omega t \sin k \omega x] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k \omega (t-x) dt \end{aligned}$$

Ha $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$, azaz $f(x)$ „ L_1 integrálható” a számegyenesen és szakaszonként folytonos

és képezzük a $T \rightarrow \infty$ határértéket: $\Delta \omega := \frac{2\pi}{T}$ és $\omega_k := k \omega = k \frac{2\pi}{T}$

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \rightarrow 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \omega \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \omega_k (t-x) dt \rightarrow \int_0^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \omega (t-x) dt d\omega$$

$\omega \in (0, +\infty)$

$$\text{akkor } f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega (t-x) dt d\omega \quad \text{Fourier-formula}$$

megj. az improprius integrál létezése bizonyítható a szakasos határérték definíciójával

$$\text{jelölés: } a_{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad b_{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a_{\omega} \cos \omega x + b_{\omega} \sin \omega x) d\omega$$

analog a Fourier-sorral
folytonos változat $\Sigma \rightarrow \int$

A Fourier-formula komplex alakja

felhasználjuk az $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ Euler-formulát, $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt d\omega \quad (*)$$

ω -ban páros fv.

az $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ feltetés miatt $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega(t-x) dt$ létezik, mivel $\frac{\omega}{2}$ -ben páratlan $\int_{-\infty}^{\infty} \dots d\omega = 0$ (**)

$$(*) - (**) \cdot i$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega(t-x) - i \sin \omega(t-x)) dt d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega(t-x)} dt d\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt}_{c(\omega)} d\omega$$

az összetevő rezgések amplitúdói. A diszkrét Σ formában ez a sorozat az $f(x)$ spektruma

gyg, ha $f(t)$ „spektrál függvénye” $c(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$,

akkor $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega$ az f „spektrál felbontása”

Fourier-transzformált szakaszonként folyt. és „abszolút integrálható”

Legyen f tetszőleges „ L_1 -integrálható” fv., azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ és $\omega \in (-\infty, \infty)$

és legyen $F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ az f fv. „Fourier-transzformáltja”

Ekkor $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$ a Fourier-transzformált „inverzió formulai” szakadási helyen $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$

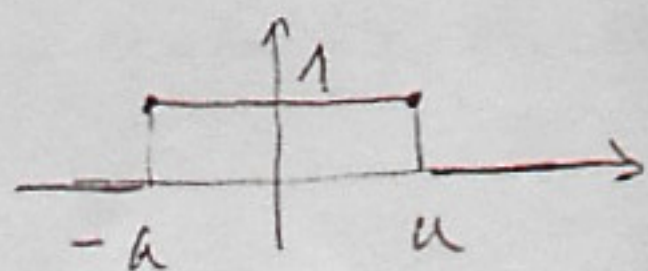
megj. a Fourier-transzformált nem mindig „ L_1 -integrálható” „abszolút integrálható”

$f(t)$ „időtérben”, $F(f(t)) = F(\omega)$ „frekvenciaterben” van

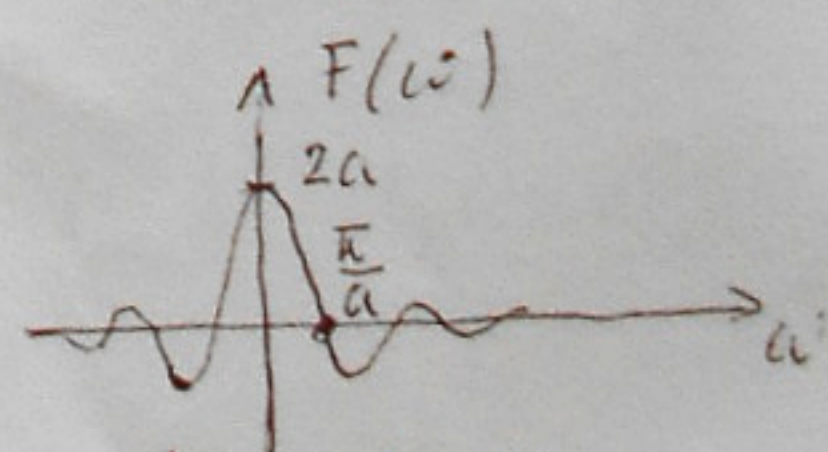
(Δ) 4-
oldal

1. Példa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx = \frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{i\omega} = \frac{2 \sin \omega a}{\omega}$$



(nem L_1 -integrálható) folytonos, és $\rightarrow 0$, ha $\omega \rightarrow \infty$
nem abszolút integrálható

2. Példa

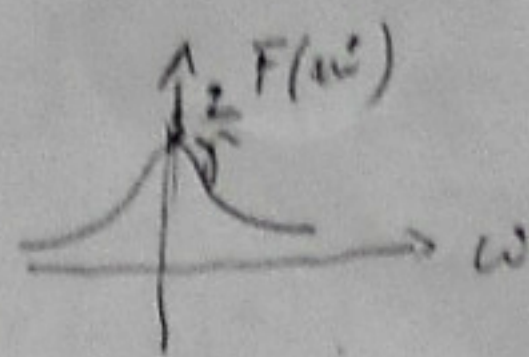
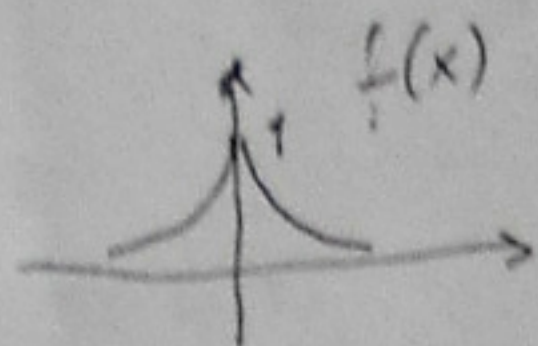
$$f(x) = e^{-ax^2}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\omega x} dx = \dots = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{komplex integrálással is } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}})$$

spec. $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $F(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ önmaga)

3. Példák

$$f(x) = e^{-\gamma|x|}, \quad \gamma > 0$$



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} (\cos \omega x - i \sin \omega x) dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \cos \omega x dx = \dots \text{pariális}$$

$$F(\omega) = \frac{2\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}$$

Valós $f(t)$ függvény Fourier-transzformáltja

$$\text{ha } f(-t) = f(t) \text{ páros} \Rightarrow F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$\text{ha } f(-t) = -f(t) \text{ páratlan} \Rightarrow F(\omega) = -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

A Fourier-transzformált tulajdonságai

1. az $f \rightarrow F$ lineáris operátor, a páros jelölése $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

2. $f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$

3. $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ szimmetria

3. komplex konjugált $\overline{f(t)} \leftrightarrow \overline{F(-\omega)}$

4. hasonlóság (scaling) $a \in \mathbb{R}, f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

5. eltolás (shifting) $a \in \mathbb{R}, f(t-a) \leftrightarrow e^{-ia\omega} F(\omega)$
 $e^{iat} f(t) \leftrightarrow F(\omega-a)$

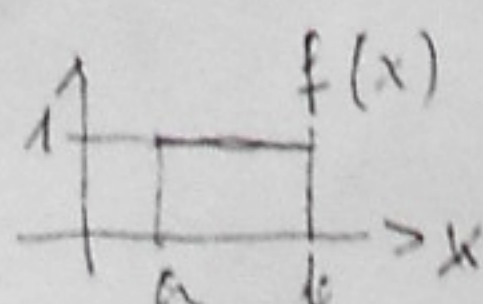
6. moduláció $f(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$

7. derivált $f^{(n)}(t) \leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega)$ ha $f^{(i)}(t)$ " L_1 -integrálható", $i=1, \dots, n-1$
"abszolút integrálható"

8. Parseval tétel $\Rightarrow$ (energy theorem) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

9. ha $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt < \infty$, akkor a Fourier-transzformáltja $F(\omega)$ ^{korlátos,} folytonos, és $\rightarrow 0$, ha $|\omega| \rightarrow \infty$

Rövidtűzés



$$F(\omega) = \int_a^b e^{-i\omega x} dx = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega}$$

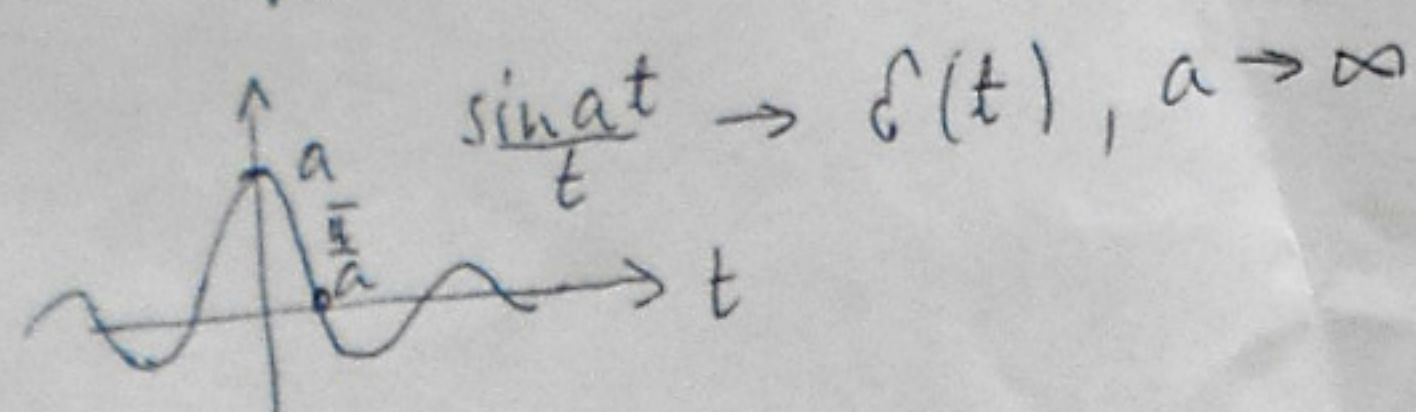
miatt

tetszőleges lépcsős függvény Fourier-transzformáltja folytonos, és $\rightarrow 0$, ha $|\omega| \rightarrow \infty$ alkalmazás: bemenő jel véges sok helyen mint értékeiből
a folytonos alá rekonstrukciója (ha az inverz létezik)

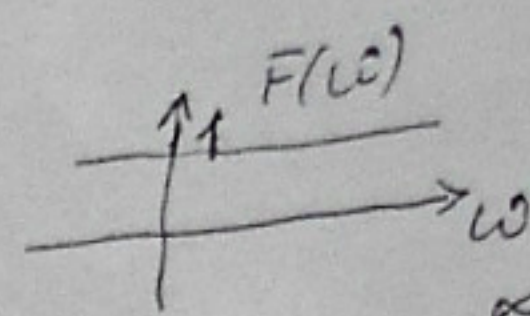
A δ -függvény: $\delta(t) = \begin{cases} 1, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0), \text{ ha } \varphi(t) \text{ folyt. } t=0\text{-ban}$$



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1$$



inverzió $\left(\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega x} d\omega \right) \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega$

ha $\overline{f(t)} = 1$, $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt$

$$1 = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$$

(A) $\rightarrow$ 2-
oldal Ψ inverz is egyértelműség tétel (Inverz- und Eindeutigkeitssatz) *

Ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ abszolút integrálható
minden véges intervallumon szabaddifferentiálható

$$f(t) = \frac{1}{2} [f(t^-) + f(t^+)], \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

akkor $f(t)$ -vel együtt $F(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}\{f(t)\}$ is Fourier-transzformálható

$$\text{is } \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\pi} F(-\omega)\right\} = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

azaz az $f \leftrightarrow \mathcal{F}\{f\}$ hozzárendelés megfordítható is egyértelmű

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$