Partielle Ableitungen, totale Differenzierbarkeit.

Definition. Die partielle Ableitung nach x der Funktion $f(x,y)$ an der Stelle (x_0,y_0) ist

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0},$$

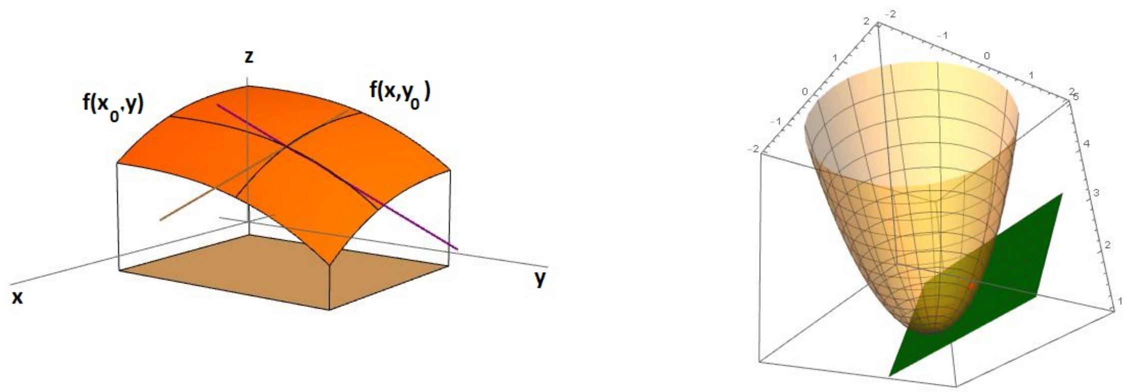
falls dieser Grenzwert existiert. Das ist der Anstieg der Tangenten an die Flächenkurve $f(x,y_0)$ im Punkt $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.
Ähnlicherweise ist die partielle Ableitung nach y an der Stelle (x_0,y_0)

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0},$$

falls dieser Grenzwert existiert. Die geometrische Deutung ist der Anstieg der Tangenten an die Flächenkurve $f(x_0,y)$ an der Stelle (x_0,y_0).
Diese partiellen Ableitungen sind auch mit $f'_x(x_0,y_0)$, bzw. $f'_y(x_0,y_0)$ bezeichnet.
Für das Skalarfeld $u=u(x,y,z)$ sind die partiellen Ableitungen u'_x, u'_y und u'_z ähnlicherweise definiert, wobei die Differentiation bezüglich einer Veränderlichen durchgeführt wird und die Anderen als Konstante angesehen werden.
Wenn die ersten partiellen Ableitungen partiell differenzierbar sind, werden die zweiten partiellen Ableitungen eingeführt:

$$f''_{xx}=\frac{\partial f'_x}{\partial x},\quad f''_{xy}=\frac{\partial f'_x}{\partial y},\quad f''_{yx}=\frac{\partial f'_y}{\partial x},\quad f''_{yy}=\frac{\partial f'_y}{\partial y}.$$

Wenn diese Ableitungen partiell weiter differenzierbar sind, können höhere partielle Ableitungen eingeführt werden.
Defintion. Die Funktion heißt $\mathbf{C}^k$-stetig (in k-ter Ordnung stetig), wenn alle k-ten partiellen Abletungen stetig sind.



1. ábra. Tangente an die Flächenkurven, Tangentialebene an das Paraoloid

Beispiel. $f(x,y)=x^2+y^2$. Die partiellen Ableitungen an der Stelle $(1,2)$ sind $f'_x=2x$, denn y ist jetzt konstant. Wird die Funktion nach y differenziert, ist x als konstant betrachtet. $f'_y=2y$, $f''_{xx}=2$, $f''_{yy}=2$, $f''_{xy}=f''_{yx}=0$, $f'_x(1,2)=2$, $f'_y(1,2)=4$.
Beispiel. $f(x,y)=x\cos(x+2y)$. Die partiellen Ableitungen sind $f'_x=\cos(x+2y)-x\sin(x+2y)$, $f'_y=-x\sin(x+2y)\cdot 2$, $f''_{xy}=f''_{yx}=-\sin(x+2y)\cdot 2-x\cos(x+2y)\cdot 2$.

Über die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der partiellen Differeniation sagt der folgende Satz die Bedingungen aus:
Satz von Young und Schwarz. Wenn die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $f(x,y)$ auf einem offenen Bereich stetig sind, dann $f''_{xy} = f''_{yx}$ gilt auf diesem Bereich.
Differentiation in der impliziten Form.
Es sei $F(x,y) = 0$ die implizite Gleichung von $y(x)$ auf einem $x \in I \subseteq D_y$ Intervall, d.h. $F(x, y(x)) \equiv 0$ gilt auf I. Wir werden zeigen, dass $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ ist an solchen Stellen, wo $F'_y \neq 0$ ist.
Beispiel. $y\cos x - x^2 \ln y + 8 = 0$ Wir differenzieren diese Gleichung nach x mit der Kettenregel, wobei $y = y(x)$ für eine innere Funktion betrachtet wird. $y'\cos x - y\sin x - 2x\ln y - x^2\frac{y'}{y} = 0$. $y' = \frac{y\sin x + 2x\ln y}{\cos x - x^2\frac{1}{y}}$, angenommen, dass im Nenner keine 0 steht.
Jetzt differenzieren wir die Funktion auf der linken Seite partiell nach x und nach y. $F'_x(x,y) = -y\sin x - 2x\ln y$, $F'_y(x,y) = \cos x - x^2\frac{1}{y}$. Der Quotient ist $\frac{-F'_x}{F'_y} = y'(x)$ tatsächlich.
Jetzt betrachten wir die implizite Gleichung $F(x,y,z) = 0$ der Funktion $z(x,y)$, d.h. $F(x,y,z(x,y)) \equiv 0$ gilt auf einem Bereich, wo $z(x,y)$ definiert ist. Die Frage ist, wie werden die partiellen Ableitungen z'_x und z'_y berechnet, ohne die explizite Gleichung von $z(x,y)$ auszudrücken.
Beispiel. $zx - z^3\cos xy + e^z - 6 = 0$. Die x, y, z werden als unabhängige Veränderlichen betrachtet. $F'_x = z + z^3(\sin xy)y$, $F'_y = z^3(\sin xy)x$ und $F'_z = x - 3z^2\cos xy + e^z$. Der nächste Satz sagt aus, wenn $F'_z \neq 0$, dann

$$z'_x = \frac{-F'_x}{F'_z} = \frac{-z - z^3(\sin xy)y}{x - 3z^2\cos xy + e^z} \quad \text{und} \quad z'_y = \frac{-F'_y}{F'_z} = \frac{-z^3(\sin xy)x}{x - 3z^2\cos xy + e^z}$$

.
Satz: Existenz der impliziten Funktion. Wenn für $F(x,y) = 0$, $F(x_0,y_0) = 0$ und F'_x und F'_y in der Umgebung von (x_0,y_0) stetig sind und $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$, dann auf einem Intervall $[x_1,x_2]$, das x_0 beinhaltet, existiert eine $y = f(x)$ so, dass
$y_0 = f(x_0)$, $F(x, f(x)) \equiv 0$ $(x \in [x_1,x_2])$, $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$ im x_0.
Ähnlicherweise gilt für $F(x,y,z) = 0$, wo auf einem Bereich B die $z = z(x,y)$ existiert so, dass $F(x,y,z(x,y)) \equiv 0$, und die partiellen Ableitungen von $F(x,y,z)$ auf B stetig sind, und $F'_z(x_0,y_0) \neq 0$ $((x_0,y_0) \in B)$, dann

$$z'_x(x_0,y_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}, \quad \text{und} \quad z'_y(x_0,y_0) = -\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Die totale Ableitung (totale Differenzierbarkeit), der Gradient.
Definition. Die Funktion $u(\mathbf{r})$ ist im $\mathbf{r}_0$ total differenzierbar, wenn es einen $\mathbf{d}$ und eine Umgebung von $\mathbf{r}_0 \in D_u$ gibt so, dass in dieser Umgebung die Funktion in der Form

$$u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}_0) + \mathbf{d} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \mathbf{s}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

erstellbar ist, wo $\mathbf{s}(\mathbf{r}) \to \mathbf{0}$, falls $\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0$ in dieser Umgebung.
Der Vektor $\mathbf{d}$ ist die totale Ableitung von $u(\mathbf{r})$ an der Stelle $\mathbf{r}_0$, und wird $\mathbf{grad}u(\mathbf{r}_0)$, der Gradient des Skalarfeldes $u(\mathbf{r})$ genannt.
Diese Form bedeutet die lineare Approximierbarkeit der Funktion $u(\mathbf{r})$ durch den linearen Teil $u(\mathbf{r}_0) + \mathbf{d} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ in der Umgebung von $\mathbf{r}_0$ mit dem Fehler $\mathbf{s}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Dieser Fehler strebt gegen 0, wenn $\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0$.
Satz. Wenn die Funktion $u(\mathbf{r})$ im Punkt (x_0,y_0,z_0) total differenzierbar ist, d.h. $\mathbf{grad}u(\mathbf{r}_0)$ existiert, dann existieren auch die partiellen Ableitungen u'_x, u'_y und u'_z in diesem Punkt, und die sind die Koordinaten des Gradienten, $\mathbf{grad}u(\mathbf{r}) = (u'_x, u'_y, u'_z)$ in diesem Punkt.
Beweis. Wir zeigen den Beweis im Spezialfall für die Funktion $f(x,y)$, dass $\mathbf{grad}f = (f'_x, f'_y)$ ist.
Die totale Differenzierbarkeit im $\mathbf{r}_0$ der Funktion heißt, dass

$$f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_0) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{grad}f(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r}), \quad \lim_{\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0} \mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{0},$$

wo $\mathbf{grad} f(\mathbf{r}_0)$ unabhängig von der Annäherungsrichtung bei $\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0$ ist.
Zuerst wählen wir $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = h\mathbf{i}$, d.h. der Punkt bewegt sich auf einer horizontalen Strecke. So ist $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = h\mathbf{i} \cdot \mathbf{grad} f(\mathbf{r}_0) + h\mathbf{i} \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r})$. Da $\mathbf{s}(\mathbf{r}) \to \mathbf{0}$, falls $h \to 0$, der Grenzwert $lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{grad} f(\mathbf{r}_0)$ ist. D.h. $f'_x(x_0, y_0) = \mathbf{i} \cdot \mathbf{grad} f(\mathbf{r}_0)$ ist die erste Koordinate des Gradienten.
Ähnlicherweise folgt, dass $f'_y(x_0, y_0) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{grad} f(\mathbf{r}_0)$, falls der Grenzwert auf der Strecke $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = k \cdot \mathbf{j}$ berechnet wird. Auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehen die Koordinaten des Gradientenvektors. Deshalb gilt, dass $\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = \mathbf{i} f'_x(x_0, y_0) + \mathbf{j} f'_y(x_0, y_0)$, was die Aussage war.
Die totale Differenzierbarkeit der Funktion $f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) mit Koordinaten aufgeschrieben lautet

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + s_1(x - x_0) + s_2(y - y_0),$$

wo $s_1, s_2 \to 0$, falls $x \to x_0, y \to y_0$.
Die lineare Approximation.
Der lineare Teil in der letzten Gleichung ist $f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = \mathbf{grad} f(x_0, y_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Dieses Skalarprodukt approximiert die Veränderung des Funktionswertes $f(x, y) - f(x_0, y_0)$. Der Fehler dieser Approximation $s_1(x - x_0) + s_2(y - y_0) = \mathbf{s} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ strebt gegen 0, wenn die Funktion total differenzierbar ist.
Definition der Tangentialebene. Die Gleichung

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

definiert die Tangentialebene, wo (x, y, z) die Koordinaten des bewegten Punktes der Ebene sind. Diese Ebene geht durch den Flächenpunkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, und bei linearer Approximation wird die Fläche durch diese Ebene in der Umgebung des gemeinsamen Punktes ersetzt.
Definition der Flächennormalen. Der Normalenvektor der Tangentialebene heißt Flächennormale. Da der Normalenvektor einer Ebene $Ax + By + Cz = 0$ die Koordinaten (A, B, C) hat, ist der Flächennormalenvektor $\mathbf{n} = (f'_x, f'_y, -1)$.
Flächennormale an die Fläche $F(x, y, z) = 0$, wenn die implizite Gleichung der Fläche angegeben ist, $\mathbf{n} = (F'_x, F'_y, F'_z)$. Denn, nach dem Satz der impliziten Funktion gilt: $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$ und $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$, wo im Nenner keine 0 steht. Der Vektor $\mathbf{n} = (z'_x, z'_y, -1)$ ist deshalb parallel zu dem Vektor (F'_x, F'_y, F'_z).
Definition. Die totale Differenzierbarkeit wird auf einen offenen Bereich (im Definitionsbereich) erweitert: die Funktion ist auf einem offenen Bereich total differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt dieses Bereiches total differenzierbar ist.
Differentiationsregeln.
Linearität: $\mathbf{grad}(u + v) = \mathbf{grad}u + \mathbf{grad}v$; $\mathbf{grad}(c \cdot u) = c\mathbf{grad}u$, $c \in \mathbf{R}$.
Leibniz-Regel: $\mathbf{grad}(u \cdot v) = (\mathbf{grad}u) \cdot v + u \cdot \mathbf{grad}v$.
Zusammenhang zwischen den partiellen und der totalen Ableitung. Im Satz haben wir gesehen, wenn eine Funktion total differenzierbar ist, dann existieren ihre partiellen Ableitungen. Umgekehrt gilt es nicht, d.h. aus der Existenz der partiellen Ableitungen folgt die totale Differenzierbarkeit NICHT. Sogar die Stetigkeit folgt nicht.
Man betrachte die Funktion $\text{sgn}^2(xy)$.
Die sgn, oder Vorzeichenfunktion ist folgenderweise definiert: $\text{sgn}a = 1$, falls $a > 0$, $= 0$, falls $a = 0$ und $= -1$, falls $a < 0$.
Wir zeigen, dass die partiellen Ableitungen im $(0, 0)$ existieren, und die Funktion ist im $(0, 0)$ nicht einmal stetig. Das Origo wird über zwei Punktfolgen angenähert. Auf der x-Achse wird die Punktfolge $(\frac{1}{n}, 0)$ konstruiert, dann $\text{sgn}^2(\frac{1}{n} \cdot 0) = 0$, konstant. Deshalb ist der Grenzwert aus dieser Richtung 0. Die zweite Puntfolge ist $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. $\text{sgn}^2(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}) = 1$ wieder konstant, der Grenzwert ist also 1. Die beiden Grenzwerte sind unterschiedlich, deshalb ist die Funktion im $(0, 0)$ nicht stetig. Sie ist aber partiell differenzierbar, was wir aufgrund der Definition zeigen.

$$\left.\frac{\partial \text{sgn}^2(xy)}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sgn}^2((0 + h) \cdot 0) - \text{sgn}^2(0 \cdot 0)}{h} = 0,$$

weil der Zähler konstant 0 ist.

$$\left.\frac{\partial \operatorname{sgn}^2(xy)}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{k\to 0} \frac{\operatorname{sgn}^2(0\cdot(0+k)) - \operatorname{sgn}^2(0\cdot 0)}{k} = 0,$$

weil der Zähler konstant 0 ist. Die zwei Flächenkurven (die eine ist der ebene Schnitt mit der xz-Ebene, die andere ist der Schnittkurve mit der winkelhalbierenden Ebene zwischen den x und y Achsen durch die z-Achse) haben horizontale Tangenten im $(0,0)$, obwohl die Fläche dort nicht stetig ist.
Aussage ohne Beweis. Wenn die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x,y)$ oder $u(x,y,z)$ an einer Stelle stetig sind, dann ist die Funktion dort total differenzierbar, d.h. der Gradient der Funktion existiert.
Beispiel. Gegeben ist $f(x,y) = x^4 + 2x^3y^2 + y$. Man schreibe die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(1,1)$ auf.
Diese Funktion ist (als Polynom von x und y) überall definiert und differenzierbar. Genauer, partiell stetig differenzierbar nach x und nach y (unendlich oft), deshalb auch total differenzierbar. Die Tangentialebene existiert in jedem Flächenpunkt.
$f'_x(x,y) = 4x^3 + 6x^2y^2$, $f'_y(x,y) = 4x^3y + 1$, $f'_x(1,1) = 10$, $f'_y(1,1) = 5$, $f(1,1) = 4$, die Gleichung der Tangentialebene ist $z - 4 = 10(x-1) + 5(y-1)$, $10x + 5y - z - 11 - 0$. Der Gradient ist $\mathbf{grad} f(1,1) = 10\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Der Gradient in den entsprechenden Flächenpunkt verschoben ist ein horizontaler Vektor.
Beispiel. Gegeben ist $z = \sin(xy)$. Man schreibe die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $y_0 = 2$ auf.
$z_0 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $z'_x = y\cos(xy)|_{(x_0,y_0)} = -1$, $z'_y = x\cos(xy)|_{(x_0,y_0)} = -\frac{\pi}{6}$, die Gleichung der Tangentialebene ist $z - \frac{\sqrt{3}}{2} = -1(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}(y-2)$.
Beispiel. An welcher Stelle ist die Tangentialebene der Fläche $z = 2x^2 + 5y^2 - 3x + 2y - 1$ parallel zu der Ebene $2x - y + 5z - 25 = 0$?
Der Flächennormale der Fläche ist $\mathbf{n} = (z'_x, z'_y, -1) = (4x-3, 10y+2, -1)$ soll parallel sein zu $(2,-1,5)$. Von hier folgt, dass $4x - 3 = -\frac{2}{5}$ und $10y + 2 = \frac{1}{5}$, Die Lösung ist $x = \frac{13}{20}$, $y = -\frac{9}{50}$. Das sind die Koordinaten des gefragten Punktes.
Wenn gefragt wird, wo ist der Gradient Nullvektor, soll man die Lösung des Gleichungssystems $4x - 3 = 0$, $10y + 2 = 0$ angeben. An dieser Stelle hat die Fläche eine horizontale Tangentialebene.