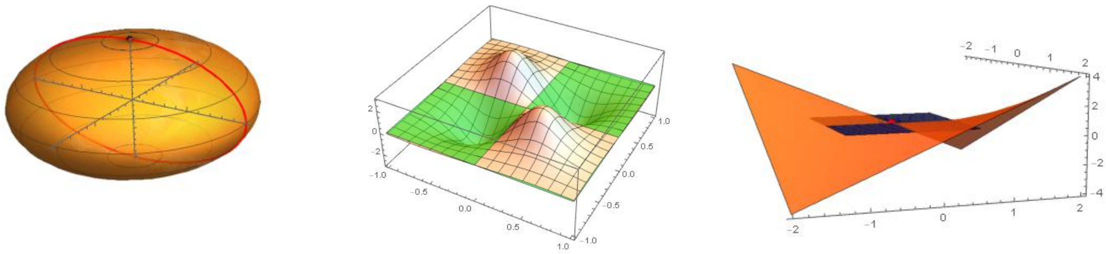
Lokale Extremstellen.

Definition. Die Funktion $f(x, y)$ hat an der Stelle (x_0, y_0) ein lokales Maximum, wenn eine Umgebung von (x_0, y_0) existiert so, dass für jeden Punkt (x, y) in dieser Umgebung $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ gilt.
Ähnlicherweise, (x_0, y_0) ist eine lokale Minimumstelle, wenn $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ in einer Umgebung von (x_0, y_0).
Bemerkung. Im späteren werden wir die total differenzierbaren Funktionen prüfen, die in jedem Punkt eine Tangentialebene haben. Die Punkte, wo die Fläche nicht differenzierbar ist, heißen singuläre Punkte, wie z.B. der Spitzpunkt einer Kegelfläche. Wenn die Kegelfläche auf die Spitze gestellt ist mit der senkrechten Rotationsachse, dann hat sie im Spitzpunkt ein lokales Minimum. Solche Punkte, wo die Fläche keine Tangentialebene hat, sind in der Differentialrechnung ausgeschlossen.
Im Bild 1 ist ein Ellipsoid gezeigt, das im Nordpol und Südpol ein lokales Maximum, bzw. lokales Minimum hat. In diesen Punkten ist die Tangentialebene horizontal. Die Fläche in der Mitte hat zwei lokale Maxima und zwei lokale Minima. In einer Umgebung dieser Stellen sind die Flächenpunkte auf einer Seite der Tangentialebene (alle unterhalb, bzw. alle oberhalb der Tangentialebene). Die dritte Fläche ist die Sattelfläche (hyperbolisches Paraboloid). Obwohl im Sattelpunkt die Tangentialebene horizontal ist, gibt es aber in jeder (noch so kleinen) Umgebung dieser Stelle Flächenpunkte auf beiden Seiten der Tangentialebene. Hier ist kein lokales Extremum.



1. ábra. Lokale Min-Max-Stellen, Sattelpunkt

Notwendige Bedingung der Existenz der lokalen Extremstelle.
Die Tangentialebene einer total differenzierbaren Fläche $f(x, y)$ an einer lokalen Extremstelle (x_0, y_0) ist horizontal, d.h. $f'_x(x_0, y_0) = 0$ und $f'_y(x_0, y_0) = 0$ sind die notwendigen Bedingungen.
Satz über die hinreichende Bedingung derExistenz der lokalen Extremstelle.
Wenn f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} im Punkt (x_0, y_0) stetig sind
und $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_x(x_0, y_0) = 0$
und $f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$ (*)
dann existiert ein lokales Extremum und zwar (x_0, y_0) ist
– eine lokale Maximumstelle, falls $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$
– ene lokale Minimumstelle, falls $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$.
Wenn $f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 \le 0$, dann existiert kein lokales Extremum im (x_0, y_0).
Bemerkung. Die quadratische Form (*) in der Determinantenform heißt Hesse-Determinante

$$DetH = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0.$$

Diese soll im Punkt geprüft werden, wo die notwendige Bedingungen für Extremstelle erfüllt sind.
Damit wir die hinreichende Bedingung der Existenz einer lokalen Extremstelle prüfen können, geben wir die Taylorsche Formel für eine Funktion $f(x, y)$ an.
Die Taylorsche Formel für $f(x, y)$.
Wir nehmen an, dass die n-ten partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y)$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetig sind. Die Hilfsfunktion $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$, $0 \le t \le 1$ wird eingeführt. Für diese Funktion schreiben wir

die Taylorsche Formel bei $t = 0$ auf:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \ldots \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + R_n$$

Wenn $t = 1$, diese Formel lautet

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \ldots \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + R_n.$$

Die Ableitungen von $F(t)$ an der Stelle $t = 1$ berechnen wir mit Kettenregel, dann

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k\right] + \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)hk + f''_{yy}(x_0, y_0)k^2\right] + \cdots + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{n!}\left[f^{(n)}_{x^n}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)h^n + \binom{n}{1} f^{(n)}_{x^{n-1}y}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)h^{n-1}k + \cdots + \binom{n}{n} f^{(n)}_{y^n}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)k^n\right],$$

wo $0 < \vartheta < 1$. Also die partiellen Ableitungen im Restglied sind in einem inneren Punkt der Strecke zwischen (x_0, y_0) und $(x_0 + h, y_0 + k)$ betrachtet, der nicht genau bestimmt werden kann, aber existiert.

Beweis des Satzes über die hinreichende Bedingung der Existenz des lokalen Extremum.

Wir wollen prüfen ob der Anstieg des Funktionswertes in einer Umgebung von (x_0, y_0) aus allen Richtungen (d.h. für beliebeg gewählte h und k) positiv, oder negativ ist. Die Taylorsche Formel wird für $n = 1$ angewendet, d.h. quadratische Approximation der Fläche wird betrachtet. Nach der notwendiger Bedingung sind die ersten partiellen Ableitungen im (x_0, y_0) Nullen, und das Restglied ist mit den zweiten partiellen Ableitungen ausgedrükt.

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)k^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)hk + f''_{yy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)k^2\right]$$

In den Veränderlichen h und k steht auf der rechten Seite ein quadratischer Ausdruck, kürzer geschrieben

$$ah^2 + 2bhk + ck^2,$$

deren Vorzeichen entscheidet, ob in der Umgebung von (x_0, y_0) für alle Funktionswerte $f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0)$, oder $f(x_0 + h, y_0 + k) < f(x_0, y_0)$ gilt, d.h die Funktion im(x_0, y_0) ein lokales Minimum, bzw. ein lokales Maximum hat.

Wenn die quadratische Form die Vorzeichen nicht wechselt, heißt sie definit, wenn sie entweder ≥ 0 oder ≤ 0 ist, dann semidefinit, und wenn sie sowohl positive, als auch negative Werte aufnimmt, dann heißt sie indefinit.

Wir prüfen also die homogen quadratische Gleichung $ah^2 + 2bhk + ck^2 = 0$ umgeformt falls $k \neq 0$,

$$a\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2b\frac{h}{k} + c = 0$$

Diese Gleichung hat keine Nullstelle, wenn die Diskriminante negativ ist, d.h. $4b^2 - 4ac < 0$, was üblicherweise in der Form $ac - b^2 > 0$ geschrieben wird. Die partiellen Ableitungen eingesetzt lautet diese Bedingung

$$f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

wo wir die Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen ausgenützt haben, deshalb kann das Vorzeichen im Punkt (x_0, y_0) statt im Zwischenpunkt geprüft werden.

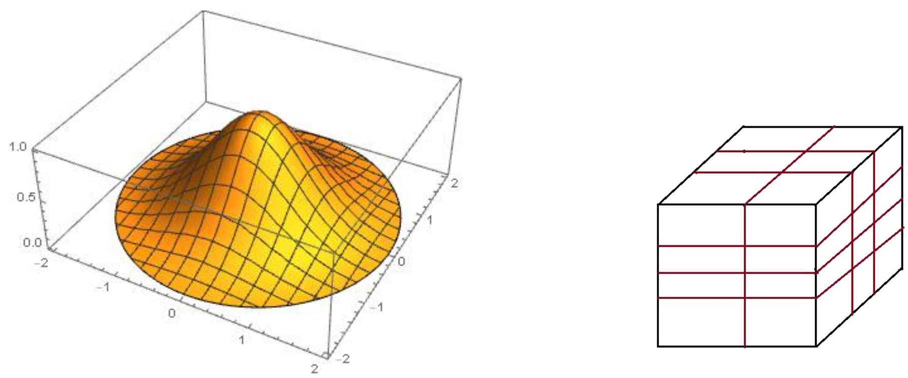
Wenn $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, dann gilt $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0$, d.h. $f(x, y)$ hat ein lokales Minimum im (x_0, y_0), wenn $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, dann ein lokales Maximum. Damit ist der Beweis fertig.

Beispiel. $f(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$. Gesucht sind die lokalen Extremstellen.

Die Funktion ist auf der ganzen xy ebene definiert und differenzierbar. Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum ist $f'_x = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(-2x) = 0$, $f'_y = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(-2y) = 0$. Von hieraus folgt, dass $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ ist die Stelle, wo die Tangentialebene horizontal ist. $f''_{xx} = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}4x^2 - 2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, $f''_{yy} = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}4y^2 - 2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, $f''_{xy} = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}4xy$. Die hinreichend Bedingung im Punkt (0,0) ist

$$DetH = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yy} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0, \text{ in } (0,0)\ DetH = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} > 0$$

erfüllt ist, und wegen $f''_{xx}(0,0) < 0$ hat die Funktion im $(0,0)$ ein lokales Maximum mit dem Wert 1.
Beispiel. $f(x,y) = x^2 - y^2$. Man bestimme die lokalen Extremstellen.
Diese Funktion ergibt die Sattelfläche. Aus $f'_x = 2x = 0$ und $f'_y = -2y = 0$ folgt, dass im Punkt $(0,0)$ ein lokales Extremum auftreten kann. Da $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 2 \cdot (-2) - 0^2 < 0$, ist im $(0,0)$ ein Sattelpunkt. Diese Funktion hat keine lokale Extremstellen.
Beispiel. Ein Box wird umgebunden, wie im Bild 2 gezeigt. Das Volumen ist 4 Einheiten, mit welchen Kantenlängen ist die Länge der Schnur am kürzesten?
Die Kantenlängen des Quaders seien x, y und z. Das Volumen $4 = xyz$. Von hier ist z.B. $z = \frac{4}{xy}$. Die Länge der Schnur ist $6(x+y) + 4(y+z) + 2(x+z) = 6(x+y) + 4(y + \frac{4}{xy}) + 2(x + \frac{4}{xy})$. Das Zielfunktion ist $f(x,y) = 8x + 10y + \frac{24}{xy}$. Die potentielle Extremstelle ist die Lösung des Gleichungssytem $f'_x = 8 - \frac{24}{x^2y} = 0$, $f'_y = 10 - \frac{24}{xy^2} = 0$. Aus diesen Gleichungen $x^2y = 3$ und $xy^2 = \frac{12}{5}$ folgt. $x \neq 0$ und $y \neq 0$, $\frac{x^2y}{xy^2} = \frac{15}{12}$, $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$. $y^3 = \frac{48}{25}$, $y_0 = \sqrt[3]{\frac{48}{25}}$, $x_0 = \frac{5}{4}\sqrt[3]{\frac{48}{25}} = \sqrt[3]{\frac{15}{4}}$. $f''_{xx} = \frac{48}{x^3y}$, $f''_{yy} = \frac{48}{xy^3}$, $f''_{xy} = \frac{24}{x^2y^2}$, $DetH > 0$ und $f''_{xx} > 0$. An der Stelle (x_0, y_0) hat die Funktion ein lokales Minimum, die gefragten Kantenlängen sind x_0, y_0 und $\frac{4}{x_0y_0}$.



2. ábra. Exponentielle Funktion, Box mit Schnur

Beispiel: Ausgleichsproblem mit dem minimalen quadratischen Fehler. Nach der Messung der Winkel eines Dreiecks ist das Ergebnis $\alpha + \beta + \gamma = \pi - \delta$, $\delta \neq 0$. Man bestimme die Korrektion $\alpha + x$, $\beta + y$, $\gamma + z$ so, dass $(\alpha + x) + (\beta + y) + (\gamma + z) = \pi$ und $x^2 + y^2 + z^2$ minimal sei.
Hier sind anscheinend 3 Veränderliche, aber sie sind nicht unabhängig. Denn $x + y + z = \delta$. z.B. mit $z = \delta - x - y$ hat die Zielfunktion 2 Veränderliche: $f(x,y) = x^2 + y^2 + (\delta - x - y)^2$ ist zu minimalisieren. $f'_x = 2x - 2(\delta - x - y)$, $f'_y = 2y - 2(\delta - x - y)$. Aus $f'_x = 0$ und $f'_y = 0$ folgt, dass an der Stelle $x_0 = \frac{\delta}{3}$, $y_0 = \frac{\delta}{3}$ die Tangentialebene horizontal ist. Hier kann ein lokales Extremum auftreten. Wir prüfen die hinreichende Bedingung: $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2\big|_{(\frac{\delta}{3}, \frac{\delta}{3})} = 4 \cdot 4 - 4 > 0$ und hier ist $f''_{xx} > 0$. Deshalb hat die Funktion in dieser Stelle ein lokales Minimum. Dementsprechend ist die gefragte Korrektion $\alpha + \frac{\delta}{3}$, $\beta + \frac{\delta}{3}$ und $\gamma + \frac{\delta}{3}$.
Beispiel. Man bestimme die lokalen Extremstellen der Funktion $z = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Die Lösung des Gleichungssystems $z'_x = \frac{y}{27} - \frac{1}{x^2} = 0$, $z'_y = \frac{x}{27} - \frac{1}{y^2} = 0$ ist die gefragte Stelle. Aus $\frac{x^2y}{27} - 1 = 0$ und $\frac{xy^2}{27} - 1 = 0$ folgt, dass $x = y$, also $x^3 - 27 = 0$, $x = 3$, $y = 3$. Hier kann ein lokales Extremum auftreten. Das Vorzeichen der Hesse-Determinante soll geprüft werden. $z''_{xx} = \frac{2}{x^3}$, $z''_{yy} = \frac{2}{y^3}$, $z''_{xy} = \frac{1}{27}$. Im Punkt $(3,3)$ $DetH = \frac{2}{27} \cdot \frac{2}{27} - \frac{1}{27^2} > 0$, die hinreichende Bedingung für die Existenz der lokalen Extremstelle ist erfüllt, und $z''_{xx}(3,3) > 0$, deshalb ist im $(3,3)$ ein lokales Minimum.