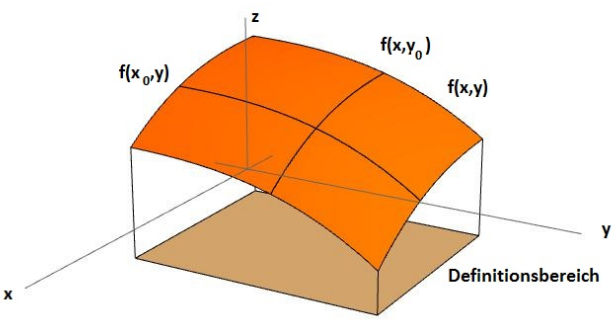
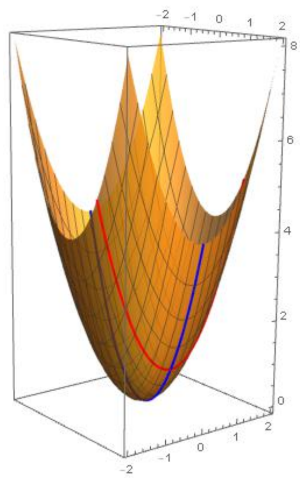
Reellwertige Funktionen mehrerer Veränderlichen. Grundlagen.

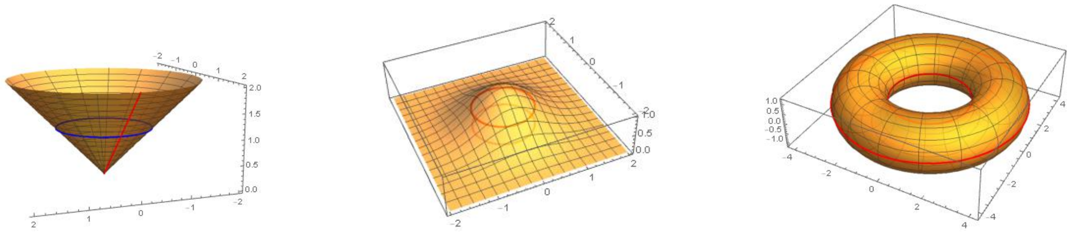
Die Abbildung $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ hat einen mehrdimensionalen Definitionsbereich und ordnet zu jedem Punkt in diesem Bereich einen reellen Wert zu.
Auf 2D Bereichen ist die Abbildung $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ in der expliziten Form durch die Funktion $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D_f \in \mathbf{R}^2$ oder in der impliziten Form durch die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ beschrieben. Wird $z = f(x,y)$ in die implizite Gleichung eingesetzt, entsteht die Identität $F(x,y,f(x,y)) \equiv 0$ auf dem Definitionsbereich. Eine implizite Gleichung kann mehrere $z = f(x,y)$ Funktionen beinhalten.
Die Kugel mit dem Mittelpunkt im Origo und Radius R hat die Gleichung $x^2+y^2+z^2 = R^2$, von hieraus ergibt $z_1 = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ die obere Halbkugel, und $z_2 = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ die untere Halbkugel. Nicht jede Fläche hat eine explizite Gleichung, denn aus einer impliziten Gleichung $F(x,y,z) = 0$ oder $F(x,y,z) = c$ kann z im allgemeinen nicht ausgedrückt werden.
Beispiel. Das Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$ ist mit der expliziten Gleichung gegeben, definiert auf der ganzen x, y Ebene, der Wertebereich ist $z \geq 0$. Die implizite Gleichung ist $x^2 + y^2 - z = 0$ (siehe im Bild 1).



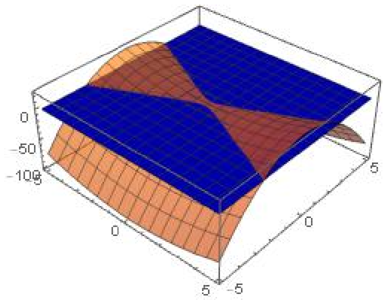


1. ábra. $z = f(x,y)$ Flächenstück und die Rotationsparaboloid

Im Bild sind die Flächenkurven $f(x_0,y)$ und $f(x,y_0)$ dargestellt, diese sind ebene Schnitten der Fläche mit der Ebene $x = x_0$ bzw. $y = y_0$.
Definition. Niveaulinien oder Höhenkurven einer Funktion $z = f(x,y)$ sind die Flächenkurven definiert durch $f(x,y) = c$. So eine Gleichung beschreibt die Kurve $y = y(x)$, $z = c$ in der impliziten Form.
Die Niveaulinien sind die Schnittkurven mit den horizontalen Ebenen $z = c$. Im Beispiel Rotationsparaboloid wählt man die z-Werte $z = 1, 4, 9$, ergeben sich die Kreise $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, bzw. $x^2 + y^2 = 9$ in den entsprechenden horizontalen Ebenen.
Die Niveaukurven der Rotationsflächen (deren Rotationsachse z ist) sind Kreise (siehe Bild 2).
Im Bild 3 ist die Sattelfläche (hyperbolisches Paraboloid) $z = x^2 - y^2$ gezeigt, deren Niveaukurven Hyperbel sind.
Auf 3D Bereichen definierte $u = u(x,y,z)$ Funktionen heißen auch Skalarfelder. Solche sind z.B. Potenzialwerte oder Temperaturen zugeordnet zu den Punkten eines räumlichen Bereiches.
Definition. Die Gleichung $u_0 = u(x,y,z)$ definiert eine Niveaufläche. Das ist die implizite Gleichung einer $z(x,y)$ Funktion.
Wenn die Funktion $u = u(x,y,z)$ ein Potentialfeld beschreibt, dann sind die Niveauflächen die Equipotentialflächen.

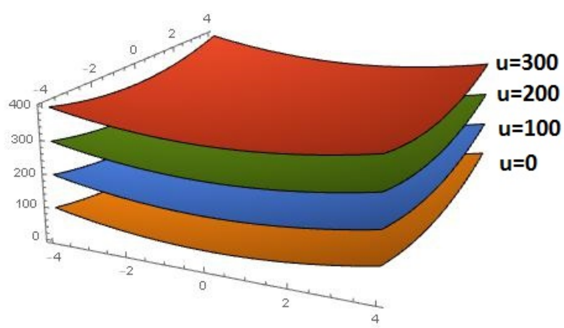


2. ábra. Rotationsflächen: Kegel, $e^{-x^2-y^2}$, Torus.



3. ábra. Die Sattelfläche mit einer $z = konst.$ Ebene geschnitten.

Beispiel. Das Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$ ist eine Niveaufläche des Skalarfeldes $u(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ gehörig zu $u = 0$. Zu $u = 1$ gehört die Niveufläche $x^2 + y^2 - z = 1$, d.h. $z = x^2 + y^2 - 1$ das Rotationsparaboloid um 1 runtergeschoben, zu $u = c$ gehört wieder ein verschobenes Rotationsparaboloid: $z = x^2 + y^2 - c$.
Bemerkung. Die Vektorform der Funktionen $f(x, y)$ und $u(x, y, z)$ sind $f(\mathbf{r})$ und $u(\mathbf{r})$, wo $\mathbf{r} = (x, y)$, bzw. $\mathbf{r} = (x, y, z)$.
Beispiel. Die Niveauflächen des Skalarfeldes $u(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathbf{r}^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ sind Kugelfächen, denn aus $u = c$ folgt $\frac{1}{x^2+y^2+z^2} = c$, d.h. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{c}$, was die Gleichung einer Kugel ist. Alle Nieveauflächen dieser Funktion sind konzentrische Kugeln mit dem Mittelpunkt im Origo.
Gleichungen der Rotationsflächen.
Eine Rotationsfläche ist durch eine Meridiankurve und eine Rotationsachse definiert. Die Meridiankurve soll eine ebene Kurve sein, und die Rotationsachse soll in dieser Ebene (heißt Meridianebene) liegen. In unseren Beispielen ist die Rotationsachse eine Koordinatenachse und die Meridiankurve liegt in einer Koordinatenebe,

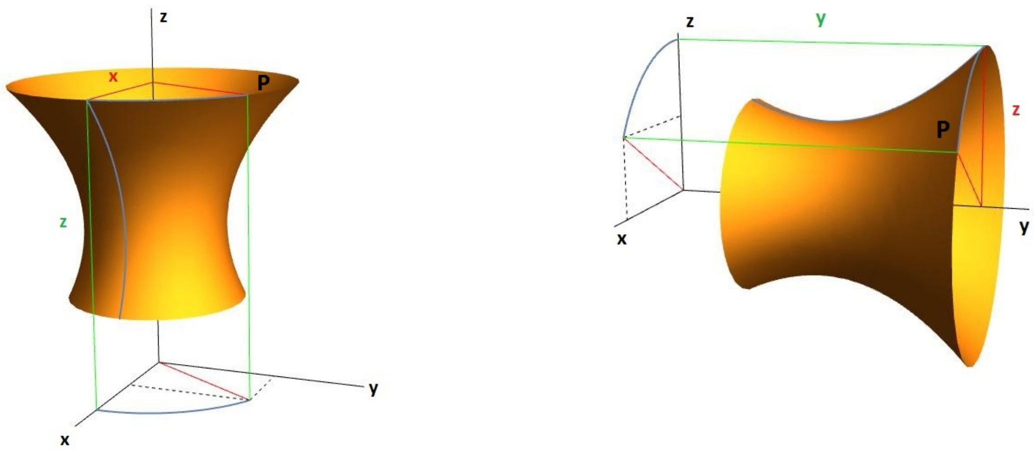


4. ábra. Niveauflächen der Funktion $u = u(x, y, z)$ gegeben durch konstante Funktionenwerte.

die die Rotationsachse beinhaltet.
Zuerst wird die Meridiankurve in der xz Ebene durch die Gleichung $z = f(x)$, $y = 0$ gegeben, und sie wird um die z-Achse rotiert. Gefragt sind die Koordinaten des Flächenpunktes $\mathbf{P}$. Er bewegt sich an einem Kreis, parallel zu der xy-Ebene mit dem Radius x. In der Projektion auf die xy-Ebene ergibt der Pythagoras-Satz den Zusammenhang der ersten und zweiten Koordinaten des Punktes $\mathbf{P}$ und des Radius des Rotationskreises. Während der Rotation bleibt die z-Koordinate unverändert. Durch die Substitution

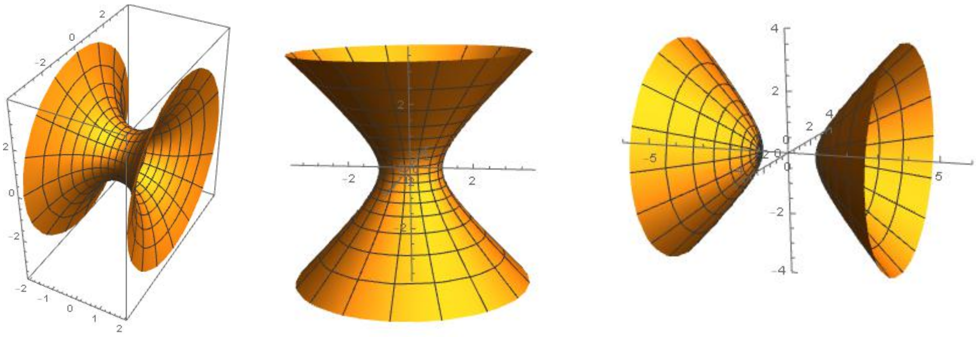
$$x \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad z \Rightarrow z \quad \text{in} \quad z = f(x, y)$$

ergibt sich die Gleichung der Rotationsfläche $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ (siehe im Bild 5).



5. ábra. Rotation um die z-Achse und um die y-Achse.

Beispiel. Das Rotationsparaboloid entsteht aus der Meridiankurve $z = x^2$, $y = 0$ gedreht um die z-Achse. Seine Gleichung ist $z = x^2 + y^2$.
Beispiel. Der Rotationskegel mit dem Halböffnungswinkel 45° entsteht aus der Mantellinie $z = x$ um die z-Achse rotiert. Die Gleichung der Fläche ist $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (siehe im Bild 2). Die Gleichung des Doppelkegels ist $z^2 = x^2 + y^2$.
Beispiel. Rotation der Kurve e^{-x^2}, $y = 0$ um die z-Achse ergibt die Rotationsfläche $z = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ (siehe Bild 2).
Die Rotation um die y-Achse der Meridiankurve $z = f(y)$, $x = 0$ führt zu der Flächengleichung $\sqrt{x^2 + z^2} = f(y)$, weil hier die y-Koordinate jedes Punktes unverändert bleibt, und der Rotationsradius die z-Koordinate des Meridianpunktes ist (siehe im Bild 5).
Beispiel. Das Katenoid entsteht durch die Rotation der Kettenkurve $z = \mathrm{ch} y$, $x = 0$ um die y-Achse. Ihre Gleichung ist $z^2 + x^2 = \mathrm{ch}^2 y$ (siehe im Bild 6).
Wenn die Meridiankurve in der xy-Ebene durch die Gleichung $F(x, y) = c$ angegeben ist, dann entsteht die Gleichung der Rotationsfläche mit der Achse y in der Form $F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = c$.
Beispiel. Rotationshyperboloid entsteht, wenn die Hyperbel gegeben durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ um die y-Achse, d.h. um ihre imaginäre Achse gedreht wird. Die Gleichung der Fläche ist $\frac{x^2+z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Das ist das einschalige Hyperboloid.
Bemerkung. Das zweischalige Hyperboloid entsteht, wenn die Hyperbel um ihre reelle Achse gedreht wird. Mit der oben gegebenen Hyperbel und Rotationsachse x gerechnet ist die Gleichung der Fläche $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$.



6. ábra. Katenoid, einschaliges und zweischaliges Hyperboloid

Grenzwert.
Umgebungen im $\mathbf{R}^2$ und im $\mathbf{R}^3$ Räumen. In 2D, d.h. in der Ebene ist eine ε-Umgebung des Punktes P_0 mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ die Kreisscheibe ohne Randkurve definiert durch die Ungleichung $|PP_0| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \varepsilon$, d.h. $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2$. In 3D ist eine ε-Umgebung eine Kugel ohne ihren Rand mit dem Mittelpunkt $\mathbf{r}_0$ und Radius ε beschrieben durch $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < \varepsilon^2$. Diese Umgebungen sind kurz durch $U_\varepsilon(P_0)$ oder $U_\varepsilon(\mathbf{r}_0)$ bezeichnet.
Definition des Grenzwertes. $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r_0}} f(\mathbf{r}) = A$, wenn zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$ existiert so, dass $|f(\mathbf{r}) - A| < \varepsilon$, falls $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta(\varepsilon)$.
Für die Funktion $f(x,y)$ schreiben wir diese Definition mit Koordinaten auf: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$ gibt so, dass der Abstand $|f(x,y) - A| < \varepsilon$ (beliebig klein ist), falls $|(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta(\varepsilon)$ (der Punkt (x,y) genügend nahe zu der aktuellen Stelle (x_0,y_0) kommt). Hier betonen wir, dass der Punkt $\mathbf{P}(x,y)$ sich in der Kreisscheibe bewegt, und der Grenzwert existiert nur, wenn er aus allen Richtungen berechnet derselbe A ist.
Beispiel. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$. Die Funktion ist im Punkt $(0,0)$ nicht definiert. Wir werden die Grenzwerberechnung auf $x \to x_0$ und $y \to y_0$ aufteilen. Zuerst bewegt sich der Punkt entlang der x-Achse. $\lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x+0} = 1$. Wenn aber der Punkt sich auf der y-Achse bewegt, dann $\lim_{y\to 0} \frac{0-y}{0+y} = -1$. Da diese Grenzwerte unterschiedlich sind, hat die Funktion an der Stelle $(0,0)$ keinen Grenzwert.
Beispiel. $\lim_{(x,y)\to(3,\infty)} \frac{xy-1}{y+1}$. Wenn $x = 3$, dann wird die Funktion $f(3,y)$ bei $y \to \infty$ geprüft. Der Punkt bewegt sich in der y-Richtung. $\lim_{y\to\infty} \frac{3y-1}{y+1} = 3$. Alle Richtungen können wir nicht prüfen, deshalb prüfen wir nach der Definition, ob 3 tatsächlich der Grenzwert ist. Ein beliebig kleines ε wird gewählt, und eine Umgebung von $(3,\infty)$ soll existieren, wo $|f(x,y) - 3| < \varepsilon$ gilt. Die K-Umgebung von ∞ ist definiert durch die Menge aller Zahlen, die größer als ein beliebig gewähltes $K > 0$ sind.

$$\left|\frac{xy-1}{y+1} - 3\right| = \left|\frac{(x-3)y-4}{y+1}\right| < \left|\frac{(x-3)y}{y+1}\right| + \left|\frac{-4}{y+1}\right| < |x-3| + \left|\frac{4}{y+1}\right|,$$

$|x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$, falls $-\frac{\varepsilon}{2} + 3 < x < \frac{\varepsilon}{2} + 3$. $\left|\frac{4}{y+1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, was $y > \frac{8}{\varepsilon} - 1$ ergibt. Also $|f(x,y) - 3| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, falls $(x,y) \in (-\frac{\varepsilon}{2} + 3 < x < \frac{\varepsilon}{2} + 3, y > \frac{8}{\varepsilon} - 1)$, was der 2D $\delta(\varepsilon)$-Bereich zu ε ist, ein Streifen in der y-Richtung mit der Breite ε über $\frac{8}{\varepsilon} - 1$. Damit haben wir gezeigt, dass der Grenzwert 3 ist.
Beispiel. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. Der Funktionswert existiert an der Stelle $(0,0)$ nicht, deshalb wählen wir zwei Kurven in der Umgebung von $(0,0)$, und werden wir entlang dieser Kurven das Origo annähern. Die erste Kurve ist die parabel $x = y^2$. In die Funktion eingesetzt prüfen wir $\lim_{y\to 0} \frac{y^2 \cdot y^2}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$. Die zweite Kurve ist die Gerade $y = mx$. Jetzt bekommen wir $\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot m^2 x^2}{x^2+m^4x^4} = 0$. Aus zwei unterschiedlichen Richtungen haben wir unterschiedliche Grenzwerte bekommen, d.h. die Funktion hat keinen Grenzwert bei $(0,0)$.

Beispiel. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$. Die Funktion ist im $(0,0)$ nicht definiert. Wir prüfen den Grenzwert entlang der Geraden $x = (\cos\alpha)t$, $y = (\sin\alpha)t$. Daher $\lim_{t\to 0} \frac{2(\cos\alpha\sin\alpha)t^2}{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)t^2} = \sin 2\alpha$, d.h. der Grenzwert vom α, also von der Richtung abhängt. Deshalb hat die Funktion bei $(0,0)$ keinen Grenzwert.
Zusammengefaßt, für die Grenzwertberechnung gibt es keine allgemeinen Methoden, wie bei den $y = f(x)$ Skalarfunktionen. Da unendlich viele Richtungen in einem 2D Bereich nicht geprüft werden können, entscheidend ist die Definition, wenn ein Grenzwert vermutet wird. Mit 3 Veränderlichen ist diese Grenzwerprüfung wesentlich komplizierter.

Stetigkeit.

Definition. Die Funktion $u(\mathbf{r})$ ist an der Stelle $\mathbf{r}_0$ stetig, wenn $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}_0)$ gilt.

Definition. Die Funktion $u(\mathbf{r})$ ist in einem Bereich $B \subseteq D_u$ stetig, wenn sie an jeder $\mathbf{r} \in B$ Stelle stetig ist.
Bei dieser Definition ist der Bereich B offen, d.h. jeder Punkt im D hat eine U_ε-Umgebung, die ganz Im B liegt. In einem Randpunkt R jede Umgebung $U_\varepsilon(R)$ hat sowohl solche Punkte, die im Bereich B liegen, als auch solche, die ausserhalb liegen. Daher soll der Punkt bei der Annäherung des aktuellen Randpunktes R im Bereich $U_\varepsilon(R) \cap B$ bei $\lim_{P\to R}$ bewegt werden. So ist die Stetigkeit auf einen abgeschlossenen Bereich, der jede seine Randpunkte beinhaltet, erweitert.

Definition. Ein Bereich B im 2D oder im 3D ist beschränkt, wenn es einen Kreis, bzw. eine Kugel existiert, der/die den ganzen Bereich beinhaltet. Anders gesagt, eine Konstante $K > 0$ existiert so, dass $|\mathbf{r}| < K$ für alle $\mathbf{r} \in B$. Ein beschränkter, abgeschlossener Bereich heißt kompakt. Bei den kompakten Bereichen sind "keine Löcher" erlaubt, was mit den topologischen Definitionen prezieser beschrieben ist.

Der Min-Max Satz von Weierstraß. Wenn die Funktion $f(\mathbf{r})$ auf einem kompakten Bereich B stetig ist, dann existieren in diesem Bereich zwei Punkte $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ so, dass $f(\mathbf{r}_1) \le f(\mathbf{r}) \le f(\mathbf{r}_2)$ für jeden $\mathbf{r} \in B$ gilt.
Eine stetige skalarwertige Funktion auf einem kompakten Bereich im 2D oder im 3D hat diese Eigenschaft wie die stetige Funktion $f(x)$ auf einem abgeschlossenen Intervall.