## Kettenregel und Folgerungen.

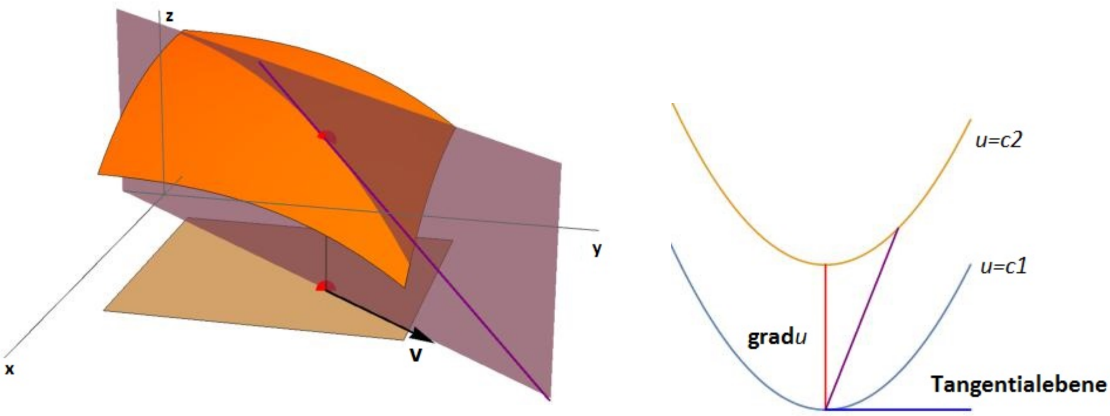
Die Komposition differenzierbarer Funktionen wird nach der Kettenregel differenziert. Bei den Funktionen mehrerer Veränderlichen entstehen verschiedene Kompositionen je nachdem unterschiedliche Funktionen in den Veränderlichen eingebettet sind. Wir werden einen Spezialfall betrachten, wo in der Funktion $f(\mathbf{r}) = f(x, y)$, oder $u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$ Skalarfunktionen $x = x(t)$, $y = y(t)$, bzw. $z = z(t)$ eingesetz werden.
**Kettenregel.** Wenn $f(\mathbf{r}) = f(x, y)$ auf einem offenen Bereich $B \subseteq D_f$ total differenzierber ist, und das Kurvenstück $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ auf einem $[t_1, t_2]$ Intervall differenzierbar ist, und $(x(t), y(t)) \in B$, dann ist die Skalarfunktion $f(x(t), y(t))$ nach $t$ differenzierbar, wie folgt:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f'_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + f'_y(x(t), y(t))\dot{y}(t) =< \mathbf{grad} f(\mathbf{r}(t)), \dot{\mathbf{r}}(t) >,$$

wo $\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t))$.
**Beweis.** Wir berechnen die gefragte Ableitung an der Stelle $(x(t_0), y(t_0))$, und den Zähler schreiben wir nach der Definition der totalen Ableitung auf:

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \left( f'_x(x(t_0), y(t_0)) \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + f'_y(x(t_0), y(t_0)) \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \right)$$
$$+ \lim_{t\to t_0} \left( s_1 \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + s_2 \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \right) = f'_x \cdot \dot{x} + f'_y \cdot \dot{y},$$

wo $s_1 \to 0$ und $s_2 \to 0$, falls $t \to 0$.
Analog gilt, dass $\frac{d}{dt}u(x(t), y(t), z(t)) = u'_x\dot{x} + u'_y\dot{y} + u'_z\dot{z}$, in der Vektorform $\frac{d}{dt}u(\mathbf{r}(t)) =< \mathbf{grad} u, \dot{\mathbf{r}}(t) >$.




1. ábra. Richtungsableitung, Veränderungsrate der Niveauflächen.

**Aussage.** In jedem Punkt $(x_0, y_0)$ der Niveaukurve $f(x, y) = c$ ist $\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$ orthogonal zu der Kurventangente (man sagt auch, orthogonal zu der Niveaukurve).
**Beweis.** Es sei die Niveaukurve in der parametrischen Form $(x(t), y(t))$ dargestellt. Dann wird die Gleichung $f(x(t), y(t)) = c$ nach $t$ mit der Kettenregel differenziert, entsteht $f'_x\dot{x} + f'_y\dot{y} = 0$, deshalb ist das Skalarprodukt $< (f'_x, f'_y), (\dot{x}, \dot{y}) >= 0$, d.h. $\mathbf{grad} f$ ist orthogonal zu der Tangentenvektor der Niveaukurve $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y})$.
**Bemerkung.** Analog gilt, dass der Gradient von $u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$ im Punkt $(x_0, y_0, z_0)$ ist orthogonal zu der Niveufläche $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0) = c$ in diesem Punkt. Die geometrische Deutung ist, dass der Gradient der Normalenvektor der Tangentialebene der Niveaufläche ist.
Im Beweis betrachtet man alle Flächenkurven $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ durch den aktuellen Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, und differenziert die Gleichung $u(x(t), y(t), z(t)) = c$ nach $t$ mit der Kettenregel. Das

Ergebniss an der Stelle $t_0$: $u'_x\dot{x}+u'_y\dot{y}+u'_z\dot{z}=<\mathbf{grad}u,\dot{\mathbf{r}}(t)>=0$ zeigt die Orthogonalität des Gradienten und der Tangenten der Flächenkurven. Diese Tangenten liegen in der Tangentialebene an die Niveaufläche, deshalb ist der Gradient orthogonal zu der Tangentialebene.

**Beispiel.** In die Fläche $f(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$ wird die Kurve $x(t)=\sin t$, $y(t)=t^2$ eigebettet (oder auf die Fläche durch die Funktion $f:(x,y)\in D_f\to\mathbf{R}$ abgebildet). Man differenziere die Funktion $f(x(t),y(t))$ nach $t$!.
$f(x(t),y(t))=\mathrm{e}^{\sin t}\sin t^2$ wird nach $t$ differenziert, bekommt man $\mathrm{e}^{\sin t}\cos t\cdot\sin t^2+\mathrm{e}^{\sin t}(\cos t^2)2t$. Andererseits mit der Kettenregel gerechnet $f'_x(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$, $f'_y=\mathrm{e}^x\cos y$, $\dot{x}(t)=\cos t$, $\dot{y}(t)=2t$, und $\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))=f'_x(x(t),y(t))\dot{x}(t)+f'_y(x(t),y(t))\dot{y}(t)$ ergibt dasselbe Ergebnis.

**Beispiel.** Man schreibe die Gleichung der Niveaufläche des Skalarfeldes $u(x,y,z)=\mathrm{e}^{xyz^2}$ durch den Punkt $P(1,1,2)$ und derer Tangentialebene auf!
$u_0=u(1,1,2)=\mathrm{e}^4$, die Niveaufläche hat die Gleichung $\mathrm{e}^{xyz^2}=4$. Das ist die implizite Gleichung der Funktion $z(x,y)$. Der Normalenvektor der Tangentialeben ist $\mathbf{grad}u(1,1,2)=(u'_x,u'_y,u'_z)\big|_{(1,1,2)}=$
$(\mathrm{e}^{xyz^2}yz^2,\mathrm{e}^{xyz^2}xz^2,\mathrm{e}^{xyz^2}2xyz)\Big|_{(1,1,2)}=\mathrm{e}^4(4,4,4)$ Dieser Flächennormale ist parallel zu dem Vektor $(1,1,1)$, die Gleichung der Tangentialebene ist $x+y+z=4$.

**Beispiel.** $u(\mathbf{r})=\ln(|\mathbf{r}|)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Gefragt ist die Niveaufläche durch den Punkt $P(1,1,2)$ und die Gleichung der Tangentialebene an die Niveaufläche in diesem Punkt.
Der Funktionswert im $P$ ist ln3, die Niveaufläche hat die Gleichung $\ln(|\mathbf{r}|)=\ln 3$. Der Gradient ist $\mathbf{grad}u=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$, im $P$ $\mathbf{grad}u(1,1,2)=(\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{2}{9})$. Die Tangentialebene hat die Gleichung $x+y+2z=6$.

**Bemerkung.** Die symbolische Differentiation nach $\mathbf{r}$ ergibt den Gradienten. $\ln(|\mathbf{r}|)=\ln\sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}$. Nach $\mathbf{r}$ differenziert $\mathbf{grad}u=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}}\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$.

**Richtungsableitung.**

Wir betrachten die Flächenpunkte der total differenzierbaren Fläche $f(x,y)$ über der Geraden gegeben durch die parametrische Gleichung in der $xy$ Ebene $x(t)=x_0+t\cos\alpha$, $y(t)=y_0+t\sin\alpha$. So entsteht eine Flächenkurve, die die Schnittlinie der Fläche und einer senkrechten Ebene durch diese Gerade ist (siehe im Bild 1). Diese Flächenkurve ist durch die Funktion $f(x(t),y(t))$ beschrieben. Wir differenzieren diese Funktion an der Stelle $(x_0,y_0)$ nach $t$, dadurch bekommen wir den Anstieg ihrer Tangente an dieser Stelle. Diese Ableitung wird Richtungsableitung nach $\alpha$, oder Richtungsableitung in der Richtung $\mathbf{v}(\cos\alpha,\sin\alpha)$ genannt.

$$f'_\alpha(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0))=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha+s_1t\cos\alpha+s_2t\sin\alpha),$$

wo $s_1,s_2\to 0$, falls $t\to 0$. Hier haben wir die Definition der totalen Differenzierbarkeit für den Anstieg des Funktionswertes aufgeschrieben, und $\dot{x}=\cos\alpha$, $\dot{y}=\sin\alpha$ eingesetzt.

$$f'_\alpha(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha$$

Diese Berechnungsformel der Richtungsableitung entsteht auch durch die Anwendung der Kettenregel an die Funktion $f(x(t),y(t))$.
In der Vektorform ist die Richtungsableitung der Funktion $f(\mathbf{r})$ an der Stelle $\mathbf{r}_0$ in der Richtung $\mathbf{v}$, wo $\mathbf{v}=(\cos a,\sin\alpha)$ Einhetsvektor ist

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}_0)=<\mathbf{grad}f(\mathbf{r}_0),\mathbf{v}>\quad|\mathbf{v}|=1.$$

Analog ist die Richtungsableitung des Skalarfeldes $u(\mathbf{r})$ im Punkt $\mathbf{r}_0$ in der Richtung gegeben durch den Einheitsvektor $\mathbf{v}$

$$u'_{\mathbf{v}}(\mathbf{r_0})=<\mathbf{grad}u(\mathbf{r}_0),\mathbf{v}>\quad|\mathbf{v}|=1.$$

Dieses Skalarprodukt ergibt die Länge der Projektion des Gradienten auf die Richtung des Einhetsvektors $\mathbf{v}$ mit positivem Vorzeichen, wenn diese Vektoren einen Spitzwinkel einschließen, und mit negativem Vorzeichen, wenn dieser Winkel Stumpfwinkel ist. Offensichtlich ist die Richtungsableitung maximal, wenn der Gradient zu dem Vektor, der die Differentiationsrichtung definiert, parallel und gleichgerichtet ist. Dementsprechend zeigt der

Gradient in die Richtung der maximalen Änderungsrate des Skalarfeldes. Im Bild 1 sind die Projektion zweier Niveauflächen eines Skalarfeldes skizziert, und gezeigt, das der kürzeste Weg, wie man von einer Niveaufläche auf die Andere gelangt, führt in der Gradientenrichtung. Die Richtungsableitung in der Gradientenrichtung ist $u'_{\mathbf{grad}u} =< \mathbf{grad}u, \frac{\mathbf{grad}u}{|\mathbf{grad}u|} >= |\mathbf{grad}u|$.

**Beispiel.** $f(x,y) = \ln(x^2+xy)$, $\alpha = 150°$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Man berechne die Richtungsableitung von $f(x,y)$ in der Richtung gegeben durch $\alpha$ an der Stelle $(x_0, y_0)$.

Die partiellen Ableitungen sind $f'_x = \frac{1}{x^2+xy}(2x+y)$, $f'_y = \frac{1}{x^2+xy}x$, $f'_\alpha(1,1) = \frac{3}{2}\cos 150° + \frac{1}{2}\sin 150° = \frac{-3\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}$.

**Beispiel.** Man berechne die Richtungsableitung der Sattelfläche $f(x,y) = x^2 - y^2$ im $P(2,-1)$ in der Richtung des Vektors $\mathbf{v}(3,-2)$.

Die partiellen Ableitungen sind $f'_x = 2x$, $f'_y = -2y$, der Einhetsvektor von $\mathbf{v}$ ist $\mathbf{v}^0 = (\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}})$. $f'_{\mathbf{v}}(2,-1) = \frac{8}{\sqrt{13}}$. Die Sattelfläche hat eine horizontale Tangentialebene wo $f'_x = 0$ und $f'_y = 0$, also im Origo. Hier ist der Flächennormalenvektor $(0,0,-1)$.

**Beispiel.** $u(x,y,z) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} - z$. Gefragt ist die Richtungsableitung im Punkt $P(1,0,1)$ in der Richtung von $\mathbf{v}(3,2,-5)$ und in der Gradientenrichtung.

$\mathbf{grad}u(x,y,z) = (\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(-2x), \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(-2y), -1)$ $\mathbf{grad}u(1,0,1) = (\mathrm{e}^{-1}(-2), 0, -1)$,

$u'_{\mathbf{v}}(1,0,1) =< \mathbf{grad}u(1,0,1), \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} >= \frac{1}{\sqrt{38}}((-6)\mathrm{e}^{-1} + 5)$.

$u'_{\mathbf{grad}u}(1,0,1) =< \mathbf{grad}u, \frac{\mathbf{grad}u}{|\mathbf{grad}u|} >= |\mathbf{grad}u| = \sqrt{4\mathrm{e}^{-2}+1}$.

**Grundlegende Sätze aus der Differentialrechnung der Funktionen mehrerer Veränderlichen**

**Aussage.** Wenn eine Funktion $u(\mathbf{r})$ an der Stelle $\mathbf{r}_0$ total differenzierbar ist, dann ist sie dort stetig.

Der Beweis folgt aus der Definition der totalen Differenzierbarkeit. Wir schreiben diese Definition im Spezialfall für $f(x,y)$ auf:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + s_1(x-x_0) + s_2(y-y_0)$$

gilt in einer Umgebung von $(x_0,y_0)$, wo $(s_1,s_2) \to (0,0)$, falls $(x,y) \to (x_0,y_0)$ aus allen Richtungen. Von hieraus kann man auslesen, dass $f(x,y) - f(x_0,y_0) \to 0$, falls $|(x,y)-(x_0,y_0)| \to 0$, was die Stetigkeit bedeutet.

**Definition.** $df = f'_x dx + f'_y dy$ heisst das totale Differential der Funktion $f(x,y)$. Das ist die lineare Approximation des Anstiegs des Funktionenwertes in einem offenen Bereich, wo die Funktion total differenzierbar ist. Denn, mit $df = f(x,y) - f(x_0,y_0)$, $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$ bekommt man den linearen Teil in der Definition der totalen Ableitung.

**Mittelwertsatz von Lagrange.** Wenn die partiellen Ableitunge $f'_x$ und $f'_y$ von $f(x,y)$ in einer konvexen Umgebung der Stelle $(x_0,y_0)$ stetig sind (equivalenterweise $f(x,y)$ total differenzierbar ist), dann

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = h \cdot f'_x(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k) + k \cdot f'_y(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

In der Vektorform $f(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_0) =< \mathbf{grad}f(\mathbf{r}_0 + \vartheta\Delta\mathbf{r}), \Delta\mathbf{r} >$, wo $0 < \vartheta < 1$.

Der Satz bedeutet: der Anstieg des Funktionenwertes ist das Skalarprodukt des Gradienten in einem inneren Punkt auf der Strecke zwischen $(x_0,y_0)$ und $(x_0+h, y_0+k)$ und des Vektors zwischen diesen Punkten. So eine Strecke existiert, weil die Umgebung konvex ist, d.h. die Strecke zwischen zwei Punkten des Bereiches ganz im Bereich liegt.

Der Beweis geht zurück zum Mittelwersatz von Lagrange für Skalarfunktionen. Die Hilfsfunktion $F(t) = f(x_0+th, y_0+tk)$ wird auf dem Intervall $0 \le t \le 1$ eingeführt, und der Mittelwertsatz von Lagrange wird angewendet, d.h. $F(1) - F(0) = F'(\vartheta) \cdot 1$, wo $0 < \vartheta < 1$. Die linke Seite dieser Gleichung ergibt die linke Seite im Satz. Die rechte Seite bekommt man, wenn $F(t)$ nach der Kettenregel differenziert: $F' = f'_x h + f'_y h$ an der entsprechenden Stelle.

**Satz: Folgerung des Mittelwertsatzes von Lagrange.** Wenn $f(\mathbf{r})$ auf einem kompakten Bereich stetig, und im Inneren des Bereiches (was offen ist) total differenzierbar ist, und $\mathbf{grad}f = \mathbf{0}$ in diesem Bereich, dann ist dort $f(\mathbf{r}) = konstant$.

Eine kurze Skizze zum Beweis: Nach der Annahme existiert ein Polygonzug zwischen zwei beliebigen Punkten des Bereiches, der ganz im Bereich liegt. Dann wird der Mittelwertsatz von Lagrange entlang des Polygonzuges streckenweise angewendet.