Hausaufgaben 9.
Differentialgleichungen

Partikuläre Lösungen von trennbaren Diff.gl.

1. $y^2 - 1 = (2y + xy)y'; \quad y(-1) = 2$ $\qquad (y^2 - 3(2 + x)^2 = 1)$

2. $y' = 1 + y^2; \quad y(\pi/2) = 1$. Zeichnen Sie die Isoklinen auf. $\qquad (y = \mathrm{tg}(x - \frac{\pi}{4}))$

Allgemeine Lösung von trennbaren Diff.gl.

3. $y' = \frac{y}{x}$ Zeichnen Sie die Isoklinen auf!
Schreiben Sie und lösen Sie die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien!
($y = cx$, orthogonale Trajektorien: konzentrische Kreise)

4. $y' = e^y \sin x$ $\qquad (y = -\ln(\cos x + c))$

5. $y(x + 1)dy - x^3(y + 1)dx = 0$ $\qquad (y - \ln(y + 1) = x^3/3 - x^2/2 + x - \ln(x + 1) + c)$

6. $(x \cos y)y' + \sin y = 0$ $\qquad (x \sin y = c,\ x \neq 0)$

Lösung der homogenen Diff.gl. durch die Substitution $u(x) = y/x$

7. $(x \cos \frac{y}{x})y' = y \cos \frac{y}{x} - x$ $\qquad (x\mathrm{e}^{\sin \frac{y}{x}} = c)$

8. $(x^2 + y^2)y' = xy$ $\qquad (x^2 = 2y^2 \ln|cy|$, singuläre Lösung: $y = 0)$

Exakte Diffgl.

9. $(6x^2 - 4xy + 2) + (-2x^2 - 3y^2 + 5)y' = 0$ $\qquad (f(x, y) = 2x^3 - y^3 - 2x^2y + 2x + 5y + c = 0)$

10. $(1 + \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}})dx + (1 - \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}})dy = 0$ $\qquad (f(x, y) = x + y + e^{\frac{x}{y}} + c = 0)$

Lineare Diffgl.

11. $y' = y + x; \quad y(0) = 0$. Zeichnen Sie die Isoklinen auf. $\qquad (y = k\mathrm{e}^x - (x + 1),\ y_0 = \mathrm{e}^x - 2)$,
(die Isoklinen sind $y = A - x$ Geraden zum Tangentenanstieg A)

12. $y' = -xy + x; \quad P(0, 7)$ $\qquad (y = (e^{x^2/2} + k)e^{-x^2/2} = 1 + ke^{-x^2/2},\ k = 6,\ y_0 = 1 + 6e^{-x^2/2})$

13. $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ $\qquad (y = \frac{1}{2}x^3 + cx)$

14. $y' + y = e^{-x}$ $\qquad (y = e^{-x}(x + c))$

15. $y' = \frac{2}{x}y + x^2 + 1$, durch den Punkt $P_0(1, 1)$ $\qquad (y_0(x) = x^2(x - \frac{1}{x} + 1))$

16. $y' = \frac{2x}{1+x^2}y + 1 + x^2$ $\qquad (y = (x + c)(1 + x^2))$

17. $y' = -2xy + 2x\mathrm{e}^{-x^2}$, $y(0) = 6$ $\qquad (y_0 = (x^2 + 6)\mathrm{e}^{-x^2})$

Diff.gl. zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

18. $y'' - 6y' + 8y = 0$ $\qquad (c_1e^{4x} + c_2e^{2x})$

19. $y'' + 2y' + y = 0$ $\qquad (y = e^{-x}(c_1x + c_2))$

20. $y'' - y' + y = 0$ $\qquad (y = e^{x/2}(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)$

21. $y'' - 3y' - 10y = 3\mathrm{e}^{4x}$, $\qquad$ (Ansatz: $Y = A\mathrm{e}^{4x}$, $A = -\frac{1}{2}$, $y = c_1\mathrm{e}^{5x} + c_2\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{4x}$)