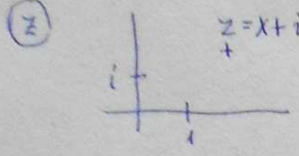
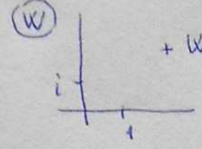
Komplexe Funktionen

Def. $f : z \to w = f(z) \quad (z, w \in \mathbb{C})$





$(x, y, u, v \in \mathbb{R})$

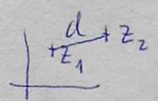
$u + iv = f(x+iy)$; $u(x,y)$, $v(x,y)$ reelle F. mit 2 Veränderlichen

Bsp. $f(z) = z^2$

$u + iv = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u(x,y)} + \underbrace{2xy}_{v(x,y)}\, i$

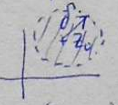
Bsp. $f(z) = |z| = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{0}_{v \equiv 0}$ auch komplexe F. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

Abstand in der komplexen Zahlenebene



$d = |z_2 - z_1|$

δ-Umgebung von $z_0 = \{ z : |z - z_0| < \delta \}$



Grenzwert, Stetigkeit $\Rightarrow$ Prüfung von $u(x,y)$ und $v(x,y)$

<u>Elementare komplexe Funktionen</u>

Aufgrund der Potenzreihen:

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}\right\} \text{absolut konvergent für } x \in \mathbb{R}$$

Def. $e^z := 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$

$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$ gerade

$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$ ungerade

Aussagen: $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, $\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w$, ... u.s.w.

die Identitäten für die reellen Funktionen sind gültig

weitere komplexe Funktionen

$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z := \frac{\cos z}{\sin z}$

Bemerkung. das Produkt zweier unendlichen Reihen (Euler-Produkt)

$(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots) \cdot (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots) = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots$
$+ (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \dots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0) + \dots$

Satz die Euler-Formel

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z}$$ (Folgerung $e^z \neq 0$)

Beweis $e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \dots$

$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} + \dots$

$= \cos z + i \sin z$ ✓

Folgerung: die exponenzielle Form der komplexen Zahl

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = r e^{i\varphi}$$

Aussage: $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

denn $\left.\begin{array}{l}\cos z + i \sin z = e^{iz} \\ \cos(-z) + i\sin(-z) = e^{-iz} \iff \cos z - i \sin z = e^{-iz}\end{array}\right\}$ + und −

Folgerung: $\cos z$ und $\sin z$ sind <u>nicht</u> beschränkt

Bsp. $e^{i\pi} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$

$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-ii}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2}$ reelle Zahl

$\sin i = \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} = \frac{e - e^{-1}}{2} i$ imaginäre Zahl

Satz e^z ist nach $2\pi i$ periodisch

Beweis $e^{z + k \cdot 2\pi i} = e^z (\underbrace{e^{2\pi i}}_{1})^k = e^z$ andere Periode existiert nicht

Bemerkung. $\cos z$ und $\sin z$ sind nach 2π periodisch, wie im Reellen.

Der komplexe Logarithmus

Def. $\ln z = w$, $z \neq 0$ sind alle komplexe Zahlen, für die $e^w = z$ gilt.

die Berechnung: $w = u + iv$, $z = re^{i\varphi}$, $r > 0$

$e^u e^{iv} = re^{i\varphi} \Rightarrow |e^u \cdot e^{iv}| = |re^{i\varphi}| \Rightarrow e^u \underbrace{|e^{iv}|}_{=1} = r \underbrace{|e^{i\varphi}|}_{=1}$

$u = \ln r$ reeller Logarithmus

$v = \varphi + 2k\pi$

$w = \ln r + i(\varphi + 2\pi \cdot k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\ln r e^{i\varphi} = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$ jede komplexe Zahl ∞ viele Log. hat

Def $z^w := e^{w \cdot \ln z}$ $(z \neq 0)$

Bsp. $\ln(-2) = \ln(2e^{i\pi}) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi \cdot k)$