Potenzreihen

Die Funktionenreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sind Potenzreihen mit dem Zentrum x_0, bzw. 0, wo die Koeffizienten a_n, $n = 1, 2, \ldots$ reelle Zahlen sind.
Wir fragen, für welche x-Werte ist eine Potenzreihe konvergent, also wir suchen den Konvergenzbereich. Offensichtlich ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ im $x = x_0$, bzw. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ im $x = 0$ konvergent. Die absolute Konvergenz prüfen wir mit den Konvergenzkriterien der positiven Reihen.
Beispiel.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 3^n}$$

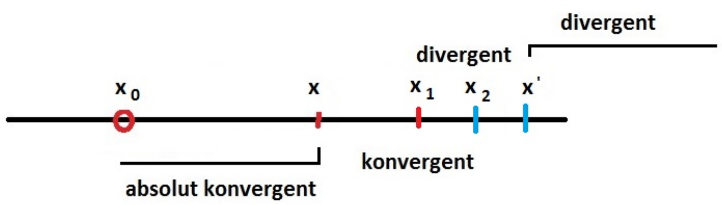
Nach dem Quotientenkriterium wenn

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}} \right| \cdot \left| \frac{n \cdot 3^n}{(x-1)^n} \right| < 1,$$

dann ist die Reihe absolut konvergent. Für welche x-Werte gilt diese Ungeleichung?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot |x-1| < 1$$

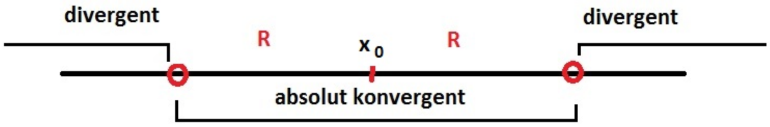
führt zu $|x-1| < 3$, d.h. für $-2 < x < 4$ ist die Reihe absolut konvergent. Das ist ein offenes, symmetrisches Intervall auf das Zentrum $x_0 = 1$ mit dem Radius 3.
Der nächste Satz sagt, dass der Konvergenzbereich einer Potenzreihe immer ein auf dem Zentrum symmetrisches Intervall ist.
Satz von Abel
Wenn die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ an einer Stelle x_1 konvergiert, dann ist sie für jedes x, wo $|x_0 - x| < |x_0 - x_1|$ absolut konvergent.
Beweis. Da die Glieder einer konvergenten Reihe eine Nullfolge bilden, deshalb existiert für die Glieder im x_1 eine obere Schranke $K > 0$, d.h. $|a_n(x_1 - x_0)^n| \le K$. Aus $|a_n| \le \frac{K}{|x_1 - x_0|^n}$ folgt $|a_n(x-x_0)^n| \le K \left| \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right|^n$.
So haben wir eine majorante geometrische Reihe mit dem Quotienten $\left| \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right| < 1$ bekommen. Da diese Reihe konvergent ist, ist die gegebene Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ absolut konvergent.
Ähnlicherwise folgt, wenn die Potenzreihe an einer Stelle x_2 divergent ist, dann ist sie für jedes x, wo $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$ divergent.



1. ábra. Abel-Satz

Definition. Man betrachte die Zahlenmenge der x-Werte, wo die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergent ist. Wenn diese Menge beschränkt ist, dann nennt man das Supremum R den Konvergenzradius der Potenzreihe, sonst ist der Konvergenzradius $R = \infty$. Der Konvergenzradius kann auch 0 sein.
Zusammengefaßt: Innerhalb des symmetrischen Konvergenzintervall $|x - x_0| < R$ ist die Potenzreihe absolut konvergent, außerhalb, wenn $|x - x_0| > R$ divergent. In den Endpunkten kann die Reihe absolut konvergent, bedingt konvergent, oder divergent sein, was aus dem Abelschen Satz nicht festgestellt werden kann.

Bemerkung. Eine Potenzreihe ist innerhalb des Konvergenzintervalls sogar gleichmäßig konvergent, und kann deshalb gliedweise differenziert und integriert werden. Wenn also im Konvergenzintervall die Grenzfunktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ist, dann $f(x)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n(x - x_0)^{n-1}$ und $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$.



2. ábra. Konvergenzintervall der Potenzreihe

Aufgabe. Man Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \cdot x^k$$

Das Quotientenkriterium wird für die Absolutwerte der Glieder angewendet.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{[(k+1)!]^2 |x|^{k+1} \cdot (2k)!}{[2(k+1)]! \cdot (k!)^2 |x|^k} < 1$$

Die Ungleichung wird auf $|x|$ gelöst.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} |x| = \frac{1}{4}|x| < 1.$$

Die Lösung ist $|x| < 4$, also $R = 4$.

Aufgabe. Man prüfe auf Konvergenz, bzw. absolut Konvergenz die Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n-1)4^n}$$

. Aus dem Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1}}{n4^{n+1}} \cdot \frac{(n-1)4^n}{(x+2)^n} \right| < 1$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{4n} \cdot |x+2| < 1,$$

$|x+2| < 4$. Der Konvergenzradius $R = 4$, die Reihe ist für $-6 < x < 2$ absolut konvergent. In den Randpunkten wenn $x = 2$ die Reihe ist $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ divergent, wenn $x = -6$, die Leibniz Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}$ entsteht, die bedingt konvergent ist.

Eindeutigkeitssatz der Potenzreihen. Wenn $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, $R > 0$, dann $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $(k = 0, 1, 2, \dots)$.

Diese Koeffizienten sind dieselben wie im Taylorschen Polynom. Wenn also die Funktion $f(x)$ die Summe der Potenzreihe ist (man sagt, dass die Grenzfunktion $f(x)$ von der Potenzreihe dargestellt ist), dann heißt diese Potenzreihe die **Taylorsche Reihe** von $f(x)$, und

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Die Berechnung der Koeffizienten haben wir bei dem Taylor Polynom n-ten Grades gesehen. Dort war die Bedingung, dass die gegebene Funktion n Mal differenzierbar ist. Der Unterschied ist, dass diese Funktion, dargestellt durch die Potenzreihe, unendlich oft differenzierbar ist.