Raumkurven.

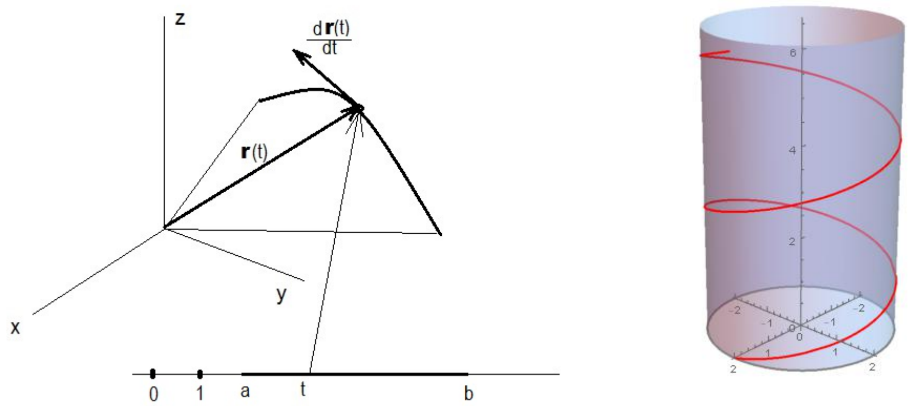
Die Raumkurven sind durch einparametrische Vektorfunktionen beschrieben. $\mathbf{r}(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, der Definitionsbereich ist ein Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ auf der Zahlengeraden, der Funktionswert ist ein Vektor.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in I.$$

Die Koordinatenfunktionen sind Skalarfunktionen. Die Grundlegenden Begriffe der Analysis, Grenzwert und Stetigkeit werden koordinatenweise erklärt, berechnet und geprüft.
Definition der Ableitung an der Stelle t_0.

$$\left.\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right|_{t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}, \quad \text{bez.} \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0).$$

Geometrische Deutung ist der Tangentenvektor an der Stelle t_0.
Die Rechenregeln der Differentiation sind die Linearität, Leibniz Regel für das Skalarprodukt und Vektorprodukt, wie bei den Skalarfunktionen. Die Kettenregel gilt auch: $\frac{d}{d\tau}\mathbf{r}(t(\tau)) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}$.
Die Berechnung der Ableitung erfolgt koordinatenweise: $\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k}$.
Die kinematische Deutung von $\mathbf{r}(t)$ ist die Weg-Zeit Funktion, wo zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ der Ortsvektor des bewegten Punktes zugeordnet ist. Die Ableitung dieser Funktion gibt den Geschwindigkeitsvektor der Bewegung an.
Definition. Ein Kurvenstück $\mathbf{r}(t)$ auf dem Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ ist regulär, wenn $\dot{\mathbf{r}}(t)$ stetig und $|\dot{\mathbf{r}}(t)| \neq 0$ ist für jedes $t \in I$.
Der Punkt, wo $\mathbf{r}(t)$ nicht differenzierbar ist, oder die Ableitung Nullvektor ist, ist singulär.
Im Weiteren werden wir annehmen, dass $\mathbf{r}(t)$ so oft setig differenzierbar ist, wie nötig.

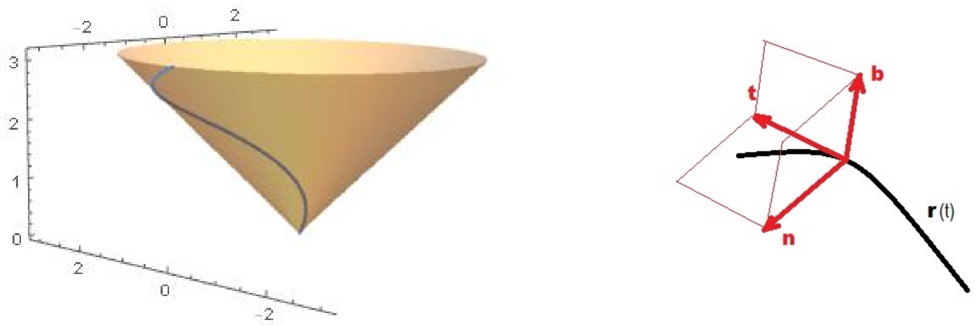


1. ábra. Kurvenstück und die Scraubkurve mit $a = 2$, $b = 1/2$.

Beispiel. Die Schraubkurve (Helix).

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\, a\cos t + \mathbf{j}\, a\sin t + \mathbf{k}\, bt, \quad t \in \mathbf{R}$$

beschreibt die Bewegung eines Punktes, der sich um die z Achse gleichmäßig rotiert und gleichzeitig entlang z mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Die Kurve ist nach 2π periodisch, und die Ganghöhe einer Periode ist $2\pi b$.
$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i}\,(-a\sin t) + \mathbf{j}\, a\cos t + \mathbf{k}\, b$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i}\,(-a\cos t) + \mathbf{j}\,(-a\sin t)$.



2. ábra. Konische Schraubkurve, das begleitende Dreibein.

Beispiel. Die konische Scharubkurve hat die Gleichung

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\, t \cos t + \mathbf{j}\, t \sin t + \mathbf{k}\, t, \quad t \in \mathbf{R}$$

Man zeige, dass die Kurve auf der Kegelfläche $x^2 + y^2 = z^2$ liegt.
Der bewegte Punkt dieser Kurve genügt der Gleichung der Kegelfläche, denn $t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t = t^2$.
Die Bogenlänge.
Die Bogenlänge eines Kurvenstückes ist unabhgig von der beschreibenden Vektorfunktion mit approximierenden Polygonzügen definiert. Eine Folge der Gesammtlängen der eingeschriebenen Polygonzügen wird konstruiert so, dass die Anzahl der Eckpunkte auf der Kurve gegen Unendlich strebt und die maximale Seitenlge gegen Null strebt. Die Bogenlänge des Kurvenstückes ist als der Grenzwert dieser Folge (falls existiert) definiert.
Aussage. Wenn $\mathbf{r}(t)$ auf dem Intervall $[a, b]$ regulär ist, dann existiert die Bogenlänge, und ist nach der Formel

$$s = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt$$

bestimmt. Wenn ein bewegter Parameterwert $t \in [a, b]$ gewählt ist, dann ist die Bogenlänge zwischen a und t eine streng monoton steigende differenzierbare Funktion

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\mathbf{r}}(u)|\, du.$$

Diese Integralfunktion nach der oberen Grenze differenziert ergibt

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\mathbf{r}}(t)|.$$

Die reguläre Parametertransformation.
Es sei $t = t(\tau)$ eine streng monoton steigende und stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall (a, b), wo $(t(a), t(b))$ im Definitionsbereich von $\mathbf{r}$ liegt. Die Funktion $\mathbf{r}(t(\tau))$ beschreibt dieselbe Bahnkurve, wie $\mathbf{r}(t)$ mit einer anderen Zeitmessung, deshalb ändert sich die Geschwindkeit der Bewegung. Die Komposition von differenzierbaren Funktionen ist differenzierbar, deshalb $\frac{d}{d\tau}\mathbf{r}(t(\tau)) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}$, kürzer geschrieben $\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{dt}{d\tau}$. Der Geschwindigkeitsvektor in der Parametrisierung nach τ ist parallel und gleichgerichtet zu dem Geschwindigkeitsvektor in der ursprünglicher Parametrisierung, aber sein Absolutwert ist mit dem Skalarfaktor $\frac{dt}{d\tau}$ multipliziert.
Geometrisch formuliert: die Richtung des Tangentenvektors bleibt unverändert, aber die Länge nicht.
Beispiel. Die Parabel $y = x^2$ wird nach x parametrisiert, d.h. $x = t$, und die Vektorfunktion ist $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $t \in \mathbf{R}$. $\dot{\mathbf{r}}(t) = 1\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$. Nach einer Sekunde (d.h. $t = 1$) gelangt der Punkt in $(1, 1)$ mit der Geschwindigkeit

$\dot{\mathbf{r}}(1) = (1,2)$. Jetzt wird die Transformation $t = 2\tau$ betrachtet. Die Bahnkurve mit dieser Zetmessung ist $\bar{\mathbf{r}}(\tau) = 2\tau\mathbf{i}+4\tau^2\mathbf{j}$, $\bar{\mathbf{r}}'(\tau) = 2\mathbf{i}+8\tau\mathbf{j}$. Der Punkt gelangt jetzt in $(1,1)$ im Zeitpunkt $\tau = \frac{1}{2}$ mit der Geschwindigkeit $\bar{\mathbf{r}}'(\frac{1}{2}) = (2,4)$, d.h. der Geschwindigkeisvektor ist das Zweifache, weil $\frac{dt}{d\tau} = 2$.
Bemerkung. Die Bogenlänge, gemessen von einem festgelegten Punkt auf der regulären Kurve bis zu dem laufenden Parameterwert t im Definitionsbereich, ist der "natürliche Parameter". Für die Berechnung der Parametertransformation die Inverse der Funktion $s(t)$, bez. $t(s)$, wird in $\mathbf{r}(t)$ eingesetzt, und die Kurve wird mit der Vektorfunktion $\mathbf{r}(t(s))$ dargestellt.
Beispiel. Die Bogenlänge der zylindrischen Schraubkurve auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\, a\cos t + \mathbf{j}\, a\sin t + \mathbf{k}\, bt$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i}\,(-a\sin t) + \mathbf{j}\, a\cos t + \mathbf{k}\, b$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$. $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$. Die Bogenlängefunktion $s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, du = t\sqrt{a^2+b^2}$. Die Inverse $t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Die Vektorfunktion nach Bogenlänge parametrisiert $\mathbf{r}^\star(s) = \mathbf{i}\, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathbf{j}\, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathbf{k}\, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Bemerkung. Wenn die Parametertransformation $t(\tau)$ streng monoton fallend ist, d.h. $\frac{dt}{d\tau} < 0$, dann ändert sich die Orientierung der Kurve, was in den Anwendungen zu vermeiden ist.
Das begleitende Dreibein.
Wir haben gezeigt dass bei einer regulärer Parametertransformation die Richtung der ersten Ableitung, d.h. des Tangentenvektors unverändert bleibt. Das gilt für die zweite Ableitung nicht. Wir diffrenzieren die erste Ableitung von $\mathbf{r}(t(\tau))$ nach der Kettenregel:

$$\frac{d}{d\tau}(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot(\frac{dt}{d\tau})^2 + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2t}{d\tau^2},$$

$$\mathbf{r}'' = \ddot{\mathbf{r}}\cdot(t')^2 + \dot{\mathbf{r}}\cdot t''.$$

Das ist die Transformation des Beschleunigungsvektors, wenn die Zeit nach dem neuen Parameter τ gemessen wird. $\mathbf{r}''$ ist nicht parallel zu $\ddot{\mathbf{r}}$.
Wir zeigen, dass die Richtung des Kreuzproduktes $\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}$ nach einer regulären Parametertransformation unverändert bleibt (die Länge aber nicht). Denn $\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'' = \dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\cdot(t')^3$. Die Richtung des Tangentenvektors und die Richtung dieses Kreuzproduktes sind also invariant gegen die Parametertransformation. Die Einheitsvektoren von $\dot{\mathbf{r}}$ und $\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}$ sind deshalb unabhängig von der Parameterwahl.
Definition des begleitenden Dreibeins.
Der Tangenteneinheitsvektor

$$\mathbf{t} := \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|},$$

Der Binormalenvektor

$$\mathbf{b} := \frac{\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|},$$

Der Hauptnormalenvektor

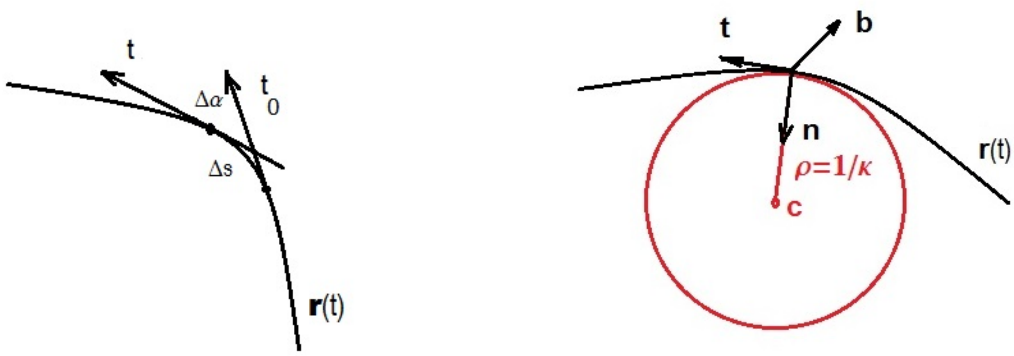
$$\mathbf{n} := \mathbf{b}\times\mathbf{t}.$$

$\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ und $\mathbf{b}$ sind paarweise orthogonale Einhetsvektoren, sie bilden das begleitende Dreibein der Kurve. Es bewegt sich entlang der Kurve, und ist ein rechtsorientiertes lokales Koordinatensystem in jedem Punkt, was z.B. in der Kinematik angewendet wird.
Die Ebene von $\dot{\mathbf{r}}$ und $\ddot{\mathbf{r}}$ heisst **Schmiegebene**, deren Normalenvektor $\mathbf{b}$ ist (sehe im Bild 2).
Beispiel. Die Kantenvektoren des begleitenden Dreibeins ist gefragt im Punkt $t = 0$ der konischen Schraubkurve.
Die erste und zweite Ableitungen der Kurve $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\, t\cos t + \mathbf{j}\, t\sin t + \mathbf{k}\, t$ sind: $\dot{\mathbf{r}}(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (-2\sin t - t\cos t, 2\cos t - t\sin t, 0)$. Im Punkt $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1,0,1)$ ist parallel zu dem Tangentenvektor, $\ddot{\mathbf{r}}(0) = (0,2,0)$, $(1,0,1)\times(0,2,0) = (-2,0,2)$ ist parallel zu dem Binormalenvektor. Die entsprechenden Einhetsvektoren sind $\mathbf{t} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{b} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $\mathbf{n} = \mathbf{b}\times\mathbf{t} = (0,1,0)$. Die Schmiegebene ist durch den Punkt $\mathbf{r}(0) = (0,0,0)$ und den Normalenvektor $\mathbf{b}$ bestimmt. Die Gleichung ist $-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0$.

Beispiel. Man zeige, dass die Kurve $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}(3t^2+1) + \mathbf{k}(t^2-1)$ ebene Kurve ist. Man bestimme diese Ebene!
Wir zeigen, dass der Binormalen Vektor konstant ist, deshalb ist die Schmiegebene auch konstant. $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 6, 2t-2)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (0, 6, 2)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = (12, -2, 6)$ ist tatsächlich unabhängig von t. Die Schmiegebene im Punkt z.B. $\mathbf{r}(0) = (0, 1, 0)$ mit dem Normalenvektor $(6, -1, 3)$ hat die Gleichung $6x - y + 3z = -1$. Die Kurve liegt in dieser Ebene, weil jeder $\mathbf{r}(t)$ dieser Gleichung genügt. $6t - (3t^2+1) + 3(t^2-2t) \equiv -1$. Deshalb ist die Kurve eine ebene Kurve, und liegt in ihrer Schmiegebene.
Karakteristische invariante Werte: die Krümmung und Torsion.
Die Krümmung karakterisiert die Abweichung der Kurve von der Tangenten.
Definition. Im Punkt $\mathbf{r}(t_0)$ ist die Krümmung der Kurve mit dem Grenzwert

$$\kappa := \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$$

definiert, wo $\Delta\alpha$ der Winkel zwischen den Tangentenvektoren $\mathbf{t}_0$ und $\mathbf{t}$ und Δs die Bogenlänge zwischen den beiden Kurvenpunkten ist (sehe im Bild 3). Die Krümmung gibt die Änderungsrate der Tangenten bezogen auf die Bogenlänge an.



3. ábra. Krümmung und Krümmungskreis.

Aussage (ohne Beweis). Wenn die Kurve durch die reguläre Vektorfunktion $\mathbf{r}(t)$ auf $[a, b]$ dargestellt ist, dann ist die Krümmung

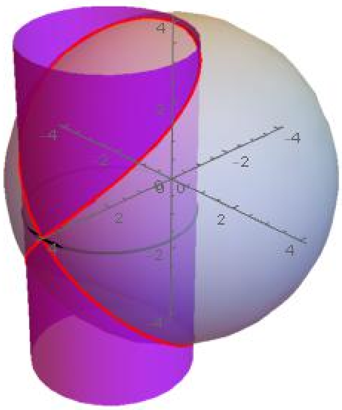
$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}, \quad t \in [a, b].$$

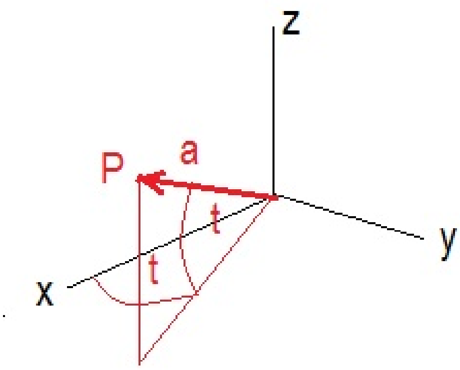
Aus dieser Formel folgt, dass die Krümmung nicht negativ ist.
Die **Krümung der Geraden** ist in jedem Punkt Null, weil die zweite Ableitung der linearen Funktion Null ist.
Die **Krümmung des Kreises** mit dem Radius a ist $\frac{1}{a}$. Denn, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-a\sin t, a\cos t, 0)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = (0, 0, a^2)$, $\kappa = \frac{|(0,0,a^2)|}{(\sqrt{a^2})^3)} = \frac{1}{a}$.
Aus der Definition ist es zu sehen, dass die Krümmung einer Kurve unabhängig von der Parameterwahl der beschreibenden Vektorfunktion ist. Denn, die Bogenlänge und Winkelwert ist unabhängig davon, welche Funktion die Kurve darstellt.
Der Krümmungskreis. In den Punkten, wo die Krümmung ungleich Null ist, wird der Krümmungskreis auf folgenderweise definiert:
Der Krümmungskreis liegt in der Schmiegebene, er hat einen Berührungspunkt mit der Kurve mit gemeinsamer Tangente. Sein Radius heißt Krümmungsradius, und ist der Reziprokwert der Krümmung, $\rho := \frac{1}{\kappa}$.

Der Mittelpunkt des Krümmungskreises $\mathbf{c} = \mathbf{r}(t) + \rho\mathbf{n}$.
Beispiel: die Viviani-Kurve. Früher haben wir gesehen, dass die Vivian-Kurve die Schnittlinie einer Kugelfläche und einer Kreiszylinderfläche ist. Wenn der Radius der Kugel a ist, dann hat die Kurve die parametrische Darstellung:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\, a\cos^2 t + \mathbf{j}\, a\cos t\sin t + \mathbf{k}\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

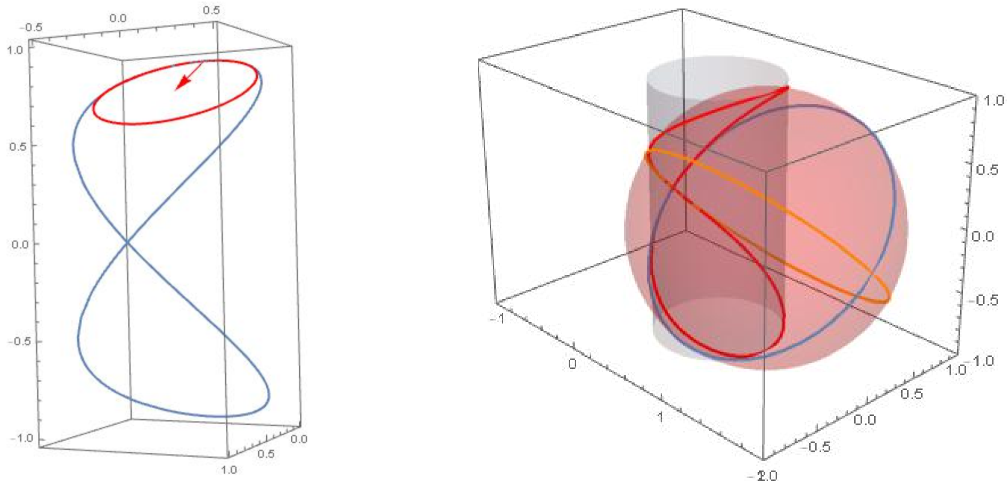
Jeder Punkt dieser Kurve genügt den Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ und $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$. Die parametrische Darstellung hat eine kinematische Deutung, undzwar der Orstvektor des bewegten Punktes wird um den Ursprung gedreht, während er mit der xy Ebene und die orthogonale Projektion mit der x Achse auch den Winkel t einschließt (sehe im Bild 4).





4. ábra. Die Viviani-Kurve.

Wir berechnen die Krümmung im Punkt $t = \frac{\pi}{2}$ und den Mittelpunkt des Krümmungskreses in diesem Punkt. $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-a\sin 2t, a\cos 2t, a\cos t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (-2a\cos 2t, -2a\sin 2t, -a\sin t)$, $\dot{\mathbf{r}}(\frac{\pi}{2}) = (0, -a, 0)$, $\ddot{\mathbf{r}}(\frac{\pi}{2}) = (2a, 0, -a)$, $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (a^2, 0, 2a^2)$, $\mathbf{n} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}})$, $\kappa = \frac{\sqrt{5}}{a}$, $\rho = \frac{a}{\sqrt{5}}$, $\mathbf{c} = (\frac{2a}{\sqrt{5}}, 0, \frac{4a}{\sqrt{5}})$.
Wir bemerken, dass die Stellen, wo die Krümmung minimal ist, d.h. der Krümmungsradius maximal ist ($\rho = a$), sind $t = 0$ und $t = \pi$ (sehe im Bild 5).
Beispiel. Man berechne den Krümmungsradius der Ellipse in den Endpukten der Großachse und der Kleinachse. Die paramerische Darstellung der Ellipse ist $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}b\sin t$, wo $a > b > 0$. $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-a\sin t, b\cos t, 0)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (-a\cos t, -b\sin t, 0)$. $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = (0, 0, ab)$, $\kappa = \frac{ab}{(a^2\cos^2 + b^2\sin^t)^{3/2}}$, Im Endpukt der Großachse $\kappa(0) = \frac{b}{a^2}$, $\rho(0) = \frac{a^2}{b}$. Im Endpunkt der Kleinachse $\kappa(\frac{\pi}{2}) = \frac{a}{b^2}$, $\rho(\frac{\pi}{2}) = \frac{b^2}{a}$.
Bemerkung. Die Krümmung des Graphen der zweimal differenzierbaren Funktion $y = f(x)$ wird mit der Formel $\kappa = \frac{f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}$ berechnet, was positives Vorzeichen ergibt, wenn die Kurve vom unten konvex, und negatives Vorzeichen, wenn die Kurve vom unten konkav ist. Im konvexen Fall wird der Tangentenvektor in den Normalenvektor in der positiven Richtung gedreht, und im konkaven Fall ist diese Drehrichtung negativ in der xy Koordinatenebene. Obwohl die Krümmung nach der Definition nicht negativ ist, wurde diese Vereinbarung für Skalarfunktionen angenommen.
Diese Formel wird aus der Formel für Raumkurven abgeleitet. Die parametrische Beschreibung der Skalarfunktion sei $\mathbf{r}(x) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}f(x)$, wo x der parameter ist. $\dot{\mathbf{r}}(x) = (1, f'(x), 0)$, $\ddot{\mathbf{r}}(x) = (0, f''(x), 0)$, $\dot{\mathbf{r}}(x) \times \ddot{\mathbf{r}}(x) = (0, 0, f''(x))$, deshalb $\kappa = \frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}$, die mit dem Vorzeichen nach Vereinbarung versehen ist.

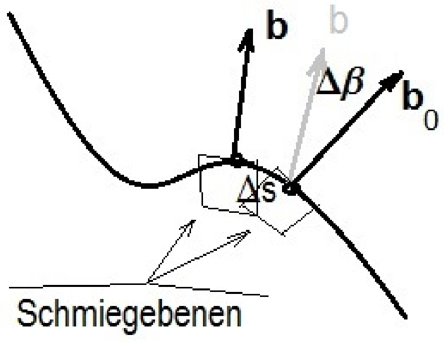


5. ábra. Krümmungskreis an der Stelle $t = \frac{\pi}{2}$ und die maximalen Krümmungsradien im Doppelpunkt $t = 0, \pi$.

Die Torsion zeigt die Änderungsrate des Binormalenvektors bezüglich der Bogenlänge. Bei den ebenen Kurven ist der Binormalenvektor konstant, deshalb ist diese Änderungsrate Null, die Kurve bleibt in der Schmiegebene, die Torsion ist Null. Eine Raumkurve windet sich aus der Schmiegebene heraus.
Definition. Die Torsion im Punkt $\mathbf{r}(t_0)$ ist mit dem Grenzwert

$$|\tau| := \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta s}$$

definiert, zu dem ein Vorzeichen zugeordnet wird je nachdem die Rotation des Binormalenvektors aus dem Tangentenrichtung betrachtet in die positive oder in die negative Richtung erfolgt. $\Delta\beta$ ist der Winkel zwischen dem Binormalenvektor $\mathbf{b}_0$ im aktuellen Punkt und dem Binormalenvektor $\mathbf{b}$ im benachbarten Punkt mit Δs Abstand entlang der Kurve gemessen (sehe im Bild 6).
Da in dieser Definition nur geometrische Daten auftreten, ist die Torsion unabhängig von der Parametrisierung der darstellenden Vektorfunktion.



6. ábra. Die Torsion.

Aussage (ohne Beweis). Wenn die Kurve durch die reguläre Vektorfunktion $\mathbf{r}(t)$ auf $[a,b]$ dargestellt ist, und $|\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)|\neq 0$, dann ist die Torsion

$$\tau(t)=\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)\,\ddot{\mathbf{r}}(t)\,\dddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)|^2},\quad t\in[a,b].$$

Im Zähler steht ein Spatprodukt der drei Vektoren, mit $(\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t))\cdot\dddot{\mathbf{r}}(t)$ definiert.
Beispiel. Man berechne die Krümmung und Torsion der Schraubkurve in dem bewegten Punkt.
$\mathbf{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$, $\dot{\mathbf{r}}(t)=(-a\sin t,a\cos t,b)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t)=(a\sin t,-a\cos t,0)$, $\dddot{\mathbf{r}}(t)=(a\sin t,-a\cos t,0)$ $\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)=(ab\sin t,-ab\cos t,a^2)$, $(\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t))\cdot\dddot{\mathbf{r}}(t)=a^2b$, $\kappa=\frac{a}{a^2+b^2}$, $\tau=\frac{b}{a^2+b^2}$. Beide Werte sind konstant, die Krümmung und auch die Torsion. Die zylindrische Schraubkurve ist die einzige Raumkurve mit dieser Eigenschaft.
Beispiel. Man berechne die Krümmung und die Torsion der Kurve $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ an der Stelle $t=0$.
$\dot{\mathbf{r}}(t)=(1,2t,3t^2)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t)=(0,2,6t)$, $\dddot{\mathbf{r}}(t)=(0,0,6)$. $\dot{\mathbf{r}}(0)=(1,0,0)$, $\ddot{\mathbf{r}}(0)=(0,2,0)$, $\dot{\mathbf{r}}(0)\times\ddot{\mathbf{r}}(0)=(0,0,2)$. $\kappa=2$, $\tau=\frac{12}{4}=3$. In diesem Punkt sind die Kantenvektoren des begleitenden Dreibeins $\mathbf{t}=\mathbf{i}$, $\mathbf{n}=\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{k}$.
Raumkurve als Schnittkurve zweier Flächen.
Die explizite Beschreibung durch eine Vektorfunktion ist jetzt nicht bekannt, deshalb soll die Kurve zuerst parametrisiert werden, dann die Ableitungen nach dieser Parameter mit der Technik der implizite Differentiation berechnen.
Beispiel. Die Flächen

$$\begin{array}{ll}(1) & x^2-3y^2-z=0\\ (2) & x+y+z-4=0\end{array}$$

sind gegeben. Man berechne die Krümmung im gemeinsamen Punkt $P(2,1,1)$.
Es sei x der Parameter. Die Kurve wäre dann durch die Vektorfunktion $\mathbf{r}(x)=(x,y(x),z(x))$ dargestellt. $y(x)$ und $z(x)$ werden in den Flächengleichungen als eingebettete Skalarfunktionen betrachtet, deren Ableitungen mit Anwendung der Kettenregel berechnet werden. Für die Berechnung der Krümmung braucht man die Ableitungen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(x)&=(1,\dot{y}(x),\dot{z}(x))\\ \ddot{\mathbf{r}}(x)&=(0,\ddot{y}(x),\ddot{z}(x))\end{aligned}$$

Wir differenzieren die Gleichungen nach x:

$$\begin{array}{lr}(1)' & 2x-6y\dot{y}-\dot{z}=0\\ (2)' & 1+\dot{y}+\dot{z}=0\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}(1)'' & 2-6\dot{y}^2-6y\ddot{y}-\ddot{z}=0\\ (2)'' & \ddot{y}+\ddot{z}=0\end{array}$$

Die Gleichungen im $P(2,1,1)$ ergeben die Gleichungssysteme für $\dot{y}$ und $\dot{z}$, bzw. für $\ddot{y}$ und $\ddot{z}$.

$$\begin{array}{lr}(1)' & 4-6\dot{y}-\dot{z}=0\\ (2)' & 1+\dot{y}+\dot{z}=0\end{array}$$

ergibt $\dot{y}=1$, $\dot{z}=-2$, d.h. $\dot{\mathbf{r}}(P)=(1,1,-2)$. Die zweiten Ableitungen im P sind

$$\begin{array}{lr}(1)'' & 2-6-6\ddot{y}-\ddot{z}=0\\ (2)'' & \ddot{y}+\ddot{z}=0\end{array}$$

Die Lösung ist $\ddot{y}=-\frac{4}{5}$, $\ddot{z}=\frac{4}{5}$. $\ddot{\mathbf{r}}(P)=(0,-\frac{4}{5},\frac{4}{5})$. Aus diesen Daten ist die Krümmung im angegebenen Punkt berechnet $\kappa=\frac{\sqrt{2}}{15}$.

Bemerkung. Die Parameterwahl x war beliebig. Es kann sein, dass die Kurve glatt ist, d.h. keine Unstetigkeit oder Spitzpunkt hat, trotzdem tritt ein Singularität bei der Differentiation auf. Diese Erscheinung wird am folgenden Beispiel gezeigt.
Beispiel. Die Flächen sind

$$\begin{array}{ll} (1) & z^2 + 2x - y^2 = 0 \\ (2) & -z + 3x + y = 0, \quad P(0,1,1) \end{array}$$

Es sei $\mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x))$. Wir differenzieren die Gleichungen nach x.

$$\begin{array}{ll} (1)' & 2z\dot{z} + 2 - 2y\dot{y} = 0 \\ (2)' & 3 + \dot{y} - \dot{z} = 0 \end{array}$$

Im Punkt P lautet das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} (1)' & \dot{z} + 1 - \dot{y} = 0 \\ (2)' & -\dot{z} + 3 + \dot{y} = 0 \end{array}$$

Keine Lösung existiert, d.h. bei dieser Parametrisierung hat die Kurve im P keine Tangente.
Jetzt wählen wir y für Parameter, so ist die Vektorfunktion $\mathbf{r}(y) = (x(y), y, z(y))$ und $\dot{\mathbf{r}}(y) = (\dot{x}(y), 1, \dot{z}(y))$. Die Gleichungen differenzieren wir nach y:

$$\begin{array}{ll} (1)' & 2z\dot{z} + 2\dot{x} - 2y = 0 \\ (2)' & -\dot{z} + 3\dot{x} + 1 = 0 \end{array}$$

Im Punkt P soll das Gleichungssytem gelöst werden:

$$\begin{array}{ll} (1)' & \dot{z} + \dot{x} - 1 = 0 \\ (2)' & -\dot{z} + 3\dot{x} + 1 = 0 \end{array}$$

$\dot{x} = 0$, $\dot{z} = 1$, deshalb $\dot{\mathbf{r}}(P) = (0, 1, 1)$. Die Parameterwahl y hat zu einer Lösung im gegebenen Punkt geführt.
Wenn die Kurve glatt ist, dann wird einer von x, y und z ein geeigneter Parameter sein.